University of Ioannina
Department of Materials Science & Engineering
Computational Materials Science

Κβαντική Θεωρία της Ύλης

Διδάσκων: Λευτέρης Λοιδωρίκης
Π1, 7146, elidorik@cc.uoi.gr
cmsl.materials.uoi.gr/elidorik

Επισκόπηση Μιγαδικών Αριθμών

Μιγαδικοί αριθμοί

- Ορίζουμε την φανταστική μονάδα *i*

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

- Κατ' επέκταση, οι αριθμοί χωρίζονται σε πραγματικούς και φανταστικούς
  - παραδείγματα φανταστικών αριθμών

$$\sqrt{-3}=\sqrt{(-1)(3)}=\sqrt{-1}\sqrt{3}=i\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{-5}=-\sqrt{(-1)(5)}=-\sqrt{-1}\sqrt{5}=-i\sqrt{5}$$

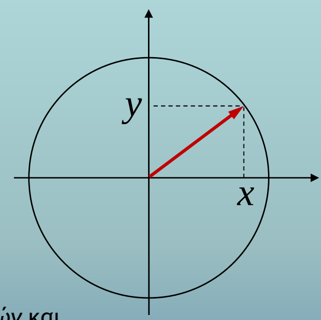
- Στην πλέον γενική περίπτωση έχουμε μιγαδικούς αριθμούς:
  - και πραγματικό μέρος, και φανταστικό μέρος

$$z=x+iy$$

Ιδιότητες μιγαδικών αριθμών

- Ένας μιγαδικός αναπαρίσταται και ως διάνυσμα
  - ένα διδιάστατο διάνυσμα

$$\boldsymbol{\rho}\equiv(x,y)=x\cdot\hat{\mathbf{i}}+y\cdot\hat{\mathbf{j}}$$



  - ένας μιγαδικός αριθμός

$$z=x+iy$$

  - ο «*άξονας των x*» γίνεται ο άξονας των *πραγματικών* και ο «*άξονας των y*» γίνεται ο άξονας των *φανταστικών*

- Μέτρο μιγαδικού αριθμού

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

γενικός κανόνας $\boxed{|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}\{z\})^2+(\mathrm{Im}\{z\})^2}}$

- Πραγματικό και φανταστικό μέρος: $\mathrm{Re}\{z\}=x, \quad \mathrm{Im}\{z\}=y$

Πράξεις με μιγαδικούς

- Έστω δύο μιγαδικοί:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$

  - άθροισμα

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\mathrm{Re}\{z\} = x_1 + x_2, \quad \mathrm{Im}\{z\} = y_1 + y_2$$

γενικός κανόνας

$$\mathrm{Re}\{z_1 + z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1\} + \mathrm{Re}\{z_2\}$$
$$\mathrm{Im}\{z_1 + z_2\} = \mathrm{Im}\{z_1\} + \mathrm{Im}\{z_2\}$$

  - διαφορά

γενικός κανόνας

$$\mathrm{Re}\{z_1 - z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1\} - \mathrm{Re}\{z_2\}$$
$$\mathrm{Im}\{z_1 - z_2\} = \mathrm{Im}\{z_1\} - \mathrm{Im}\{z_2\}$$

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Επισκόπηση Μιγαδικών Αριθμών

Πράξεις με μιγαδικούς

- Έστω δύο μιγαδικοί:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$

  - γινόμενο

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + iiy_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$\mathrm{Re}\{z\} = x_1x_2 - y_1y_2, \quad \mathrm{Im}\{z\} = x_1y_2 + x_2y_1$$

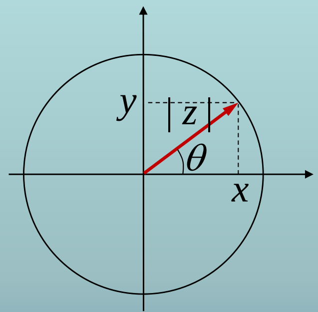
γενικός κανόνας

$$\mathrm{Re}\{z_1 \cdot z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1\}\,\mathrm{Re}\{z_2\} - \mathrm{Im}\{z_1\}\,\mathrm{Im}\{z_2\}$$
$$\mathrm{Im}\{z_1 \cdot z_2\} = \mathrm{Re}\{z_1\}\,\mathrm{Im}\{z_2\} + \mathrm{Re}\{z_2\}\,\mathrm{Im}\{z_1\}$$

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Επισκόπηση Μιγαδικών Αριθμών

Αναπαράσταση σε «πολικές» συντεταγμένες

- Ένας μιγαδικός αναπαρίσταται και σε πολικές συντεταγμένες
  - ένα διδιάστατο διάνυσμα



$$\boldsymbol{\rho} = x\cdot\hat{\mathbf{i}} + y\cdot\hat{\mathbf{j}} \equiv (|\boldsymbol{\rho}|, \theta)$$
$$|\boldsymbol{\rho}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

  - ένας μιγαδικός αριθμός

$$\left.\begin{array}{l} z = x + iy \equiv (|z|, \theta) \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta \end{array}$$

- Πολική αναπαράσταση μιγαδικού

$$\left. z = x + iy = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta} \right\} \quad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$$

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Επισκόπηση Μιγαδικών Αριθμών

Ανάπτυγμα εκθετικού

- Γνωρίζουμε την ανάπτυξη σε σειρά του εκθετικού

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

- Τι γίνεται όταν το εκθετικό είναι μιγαδικό;

$$\mathrm{e}^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

$$= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots)$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \qquad \boxed{|\mathrm{e}^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1}$$

Πράξεις με μιγαδικούς

- Έστω δύο μιγαδικοί: $z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1| \mathrm{e}^{i\theta_1}$

  $z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2| \mathrm{e}^{i\theta_2}$

  - γινόμενο $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}$
  - διαίρεση $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}$
  - μέτρο γινομένου $|z_1 \cdot z_2| = \left| |z_1| \cdot |z_2| \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} \right| = |z_1| \cdot |z_2|$
- Μιγαδικός συζυγής
  - το φανταστικό μέρος αλλάζει πρόσημο

    $$z^* = x - iy = |z| \mathrm{e}^{-i\theta}$$

  - μέτρο μιγαδικού

    $$z \cdot z^* = |z| \mathrm{e}^{i\theta} |z| \mathrm{e}^{-i\theta} = |z|^2$$

$$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + iyx - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$