



Κβαντική Θεωρία της Ύλης

Διδάσκων: Λευτέρης Λοιδωρίκης
Π11, 7146, elidorik@cc.uoi.gr
cmsl.materials.uoi.gr/elidorik

Επισκόπηση Μιγαδικών Αριθμών

Μιγαδικοί αριθμοί

- Ορίζουμε την φανταστική μονάδα i

$$i = \sqrt{-1}$$

- Κατ' επέκταση, οι αριθμοί χωρίζονται σε πραγματικούς και φανταστικούς
 - παραδείγματα φανταστικών αριθμών

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-1)(3)} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{-5} = -\sqrt{(-1)(5)} = -\sqrt{-1}\sqrt{5} = -i\sqrt{5}$$

- Στην πλέον γενική περίπτωση έχουμε μιγαδικούς αριθμούς:
 - και πραγματικό μέρος, και φανταστικό μέρος

$$z = x + iy$$

Ιδιότητες μιγαδικών αριθμών

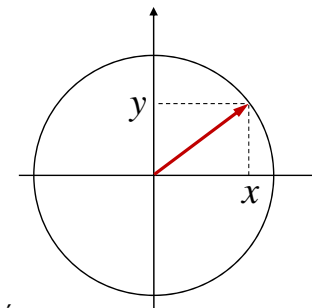
- Ένας μιγαδικός αναπαρίσταται και ως διάνυσμα
 - ένα διδιάστατο διάνυσμα

$$\mathbf{p} \equiv (x, y) = x \cdot \hat{\mathbf{i}} + y \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

- ένας μιγαδικός αριθμός

$$z = x + iy$$

- ο «άξονας των x » γίνεται ο άξονας των πραγματικών και ο «άξονας των y » γίνεται ο άξονας των φανταστικών



- Μέτρο μιγαδικού αριθμού

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Γενικός κανόνας } |z| = \sqrt{(\text{Re}\{z\})^2 + (\text{Im}\{z\})^2}$$

- Πραγματικό και φανταστικό μέρος: $\text{Re}\{z\} = x$, $\text{Im}\{z\} = y$



Πράξεις με μιγαδικούς

- Έστω δύο μιγαδικοί:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

- άθροισμα

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\operatorname{Re}\{z\} = x_1 + x_2, \quad \operatorname{Im}\{z\} = y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned} \text{γενικός κανόνας} \quad \operatorname{Re}\{z_1 + z_2\} &= \operatorname{Re}\{z_1\} + \operatorname{Re}\{z_2\} \\ \operatorname{Im}\{z_1 + z_2\} &= \operatorname{Im}\{z_1\} + \operatorname{Im}\{z_2\} \end{aligned}$$

- διαφορά

$$\begin{aligned} \text{γενικός κανόνας} \quad \operatorname{Re}\{z_1 - z_2\} &= \operatorname{Re}\{z_1\} - \operatorname{Re}\{z_2\} \\ \operatorname{Im}\{z_1 - z_2\} &= \operatorname{Im}\{z_1\} - \operatorname{Im}\{z_2\} \end{aligned}$$



Αναπαράσταση σε «πολικές» συντεταγμένες

- Ένας μιγαδικός αναπαρίσταται και σε πολικές συντεταγμένες

- ένα διδιάστατο διάνυσμα

$$\boldsymbol{\rho} = x \cdot \hat{\mathbf{i}} + y \cdot \hat{\mathbf{j}} \equiv (|\boldsymbol{\rho}|, \theta)$$

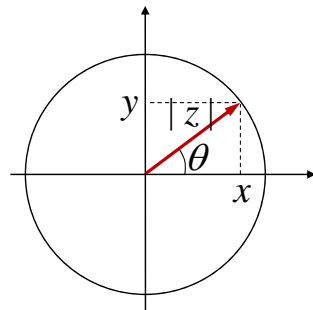
$$|\boldsymbol{\rho}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

- ένας μιγαδικός αριθμός

$$z = x + iy \equiv (|z|, \theta)$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= |z| \cos \theta \\ y &= |z| \sin \theta \end{aligned} \right\}$$



- Πολική αναπαράσταση μιγαδικού

$$z = x + iy = |z| e^{i\theta} \quad \left\} \quad z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta$$



Πράξεις με μιγαδικούς

- Έστω δύο μιγαδικοί:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

- γινόμενο

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$\operatorname{Re}\{z\} = x_1x_2 - y_1y_2, \quad \operatorname{Im}\{z\} = x_1y_2 + x_2y_1$$

$$\begin{aligned} \text{γενικός κανόνας} \quad \operatorname{Re}\{z_1 \cdot z_2\} &= \operatorname{Re}\{z_1\} \operatorname{Re}\{z_2\} - \operatorname{Im}\{z_1\} \operatorname{Im}\{z_2\} \\ \operatorname{Im}\{z_1 \cdot z_2\} &= \operatorname{Re}\{z_1\} \operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Re}\{z_2\} \operatorname{Im}\{z_1\} \end{aligned}$$



Ανάπτυγμα εκθετικού

- Γνωρίζουμε την ανάπτυξη σε σειρά του εκθετικού

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

- Τι γίνεται όταν το εκθετικό είναι μιγαδικό;

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$



Πράξεις με μιγαδικούς

- Έστω δύο μιγαδικοί: $z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$
 $z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

- γινόμενο $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

- διαίρεση $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

- μέτρο γινομένου $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = |z_1| \cdot |z_2|$

- Μιγαδικός συζυγής

- το φανταστικό μέρος αλλάζει πρόσημο

$$z^* = x - iy = |z| e^{-i\theta}$$

- μέτρο μιγαδικού

$$z \cdot z^* = |z| e^{i\theta} |z| e^{-i\theta} = |z|^2$$

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + iyx - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$