

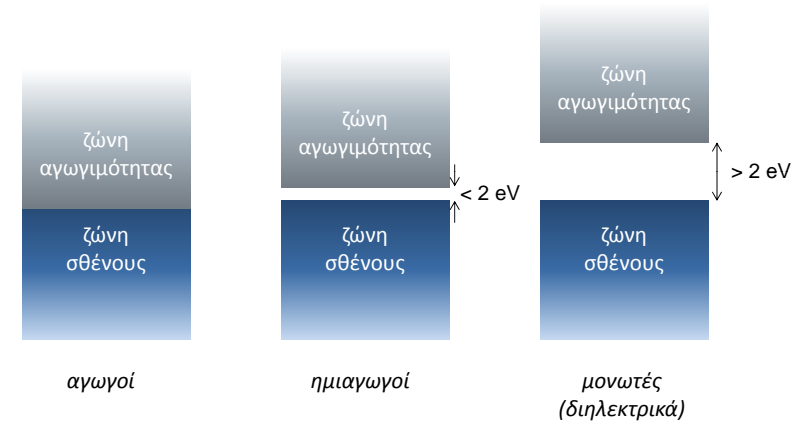
Ηλεκτρικές, Μαγνητικές και Οπτικές Ιδιότητες Υλικών

(α) Διηλεκτρικά Υλικά
(β) Οπτικές Ιδιότητες Υλικών

Δ. Παπαγεωργίου
Ι. Παναγιωτόπουλος
Ε. Λοιδωρίκης

Ηλεκτρικές ιδιότητες

Σύμφωνα με τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες τα υλικά κατατάσσονται σε 3 κατηγορίες



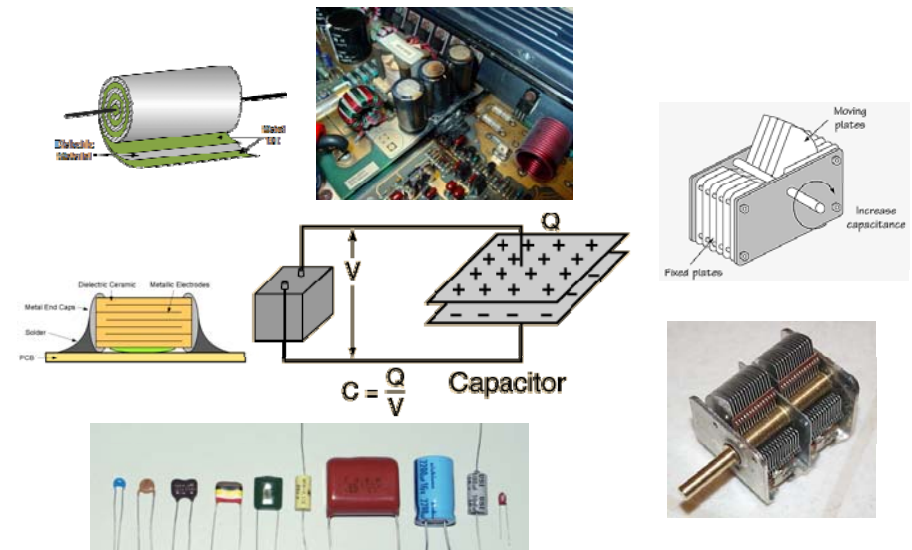
Διηλεκτρικά υλικά

Δεν υπάρχουν ελεύθεροι φορείς. Όλα τα ηλεκτρόνια σθένους είναι ισχυρά συνδεδεμένα στα άτομα και στους χημικούς δεσμούς τους

Τα διηλεκτρικά υλικά:

- Δεν επιτρέπουν την αγωγή ρεύματος -> ηλεκτρική μόνωση
- Χαρακτηριστική ιδιότητα -> ηλεκτρική πόλωση (διπολική) σε ηλεκτρικό πεδίο
- Χαρακτηριστικά μεγέθη -> διηλεκτρική σταθερά (σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα)
- Χαρακτηριστική εφαρμογή -> πυκνωτές

Πυκνωτής



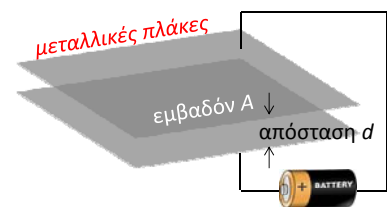
Πυκνωτής

Χαρακτηριστική ιδιότητα του πυκνωτή είναι η χωρητικότητα φορτίου

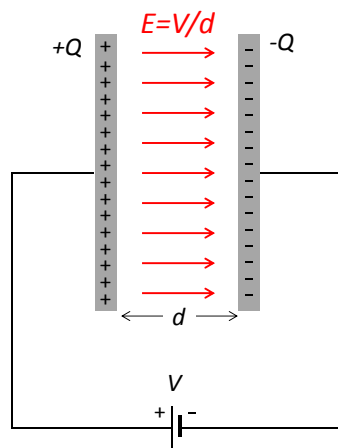
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Φορτίο που συσσωρεύεται στον κάθε οπλισμό του πυκνωτή

$$Q = C \cdot V$$

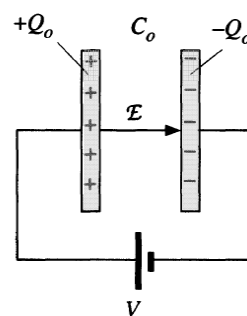


ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον πυκνωτή

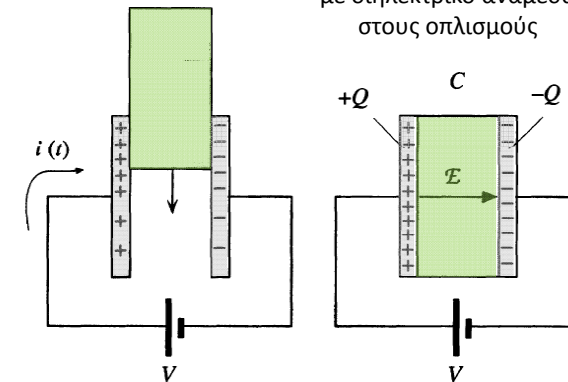


Πυκνωτής

με αέρα ανάμεσα στους οπλισμούς

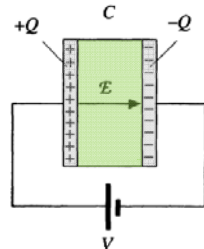
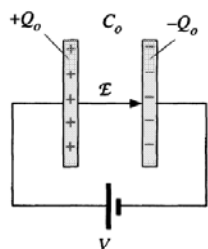


με διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς



Η τάση από την πηγή παραμένει σταθερή -> σταθερό πεδίο E μέσα στον πυκνωτή
Ρεύμα φορτίου για να διατηρηθεί το πεδίο-> αύξηση φορτίου στους οπλισμούς
-> **αύξηση της χωρητικότητας του πυκνωτή**

Αύξηση χωρητικότητας με διηλεκτρικά



Με αέρα ανάμεσα στους οπλισμούς

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad Q_0 = C_0 V$$

Με διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς

$$C = \epsilon \frac{A}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad Q = CV = \epsilon_r C_0 V$$

$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$
σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα
ή αλλιώς
διηλεκτρική σταθερά
(χαρακτηριστικό κάθε διηλεκτρικού)
 $\epsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{Q}{Q_0}$
λόγω πόλωσης του διηλεκτρικού

Πόλωση

Ηλεκτρικό δίπολο: δύο ίσα και αντίθετα φορτία χωρισμένα σε απόσταση a

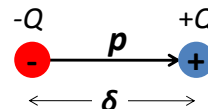
συνολικό φορτίο μηδέν

$$Q_{tot} = 0$$

διάνυσμα διπολικής ροπής

$$\mathbf{p} = \delta \cdot \mathbf{Q}$$

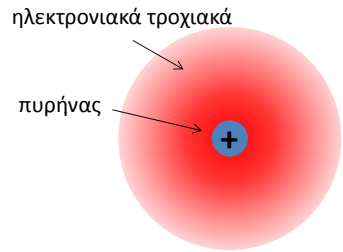
φορά από το αρνητικό στο θετικό (αντίθετα του ηλεκτρικού πεδίου)



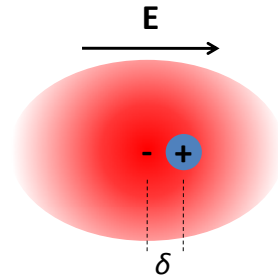
Το συνολικό φορτίο σε ένα διηλεκτρικό είναι προφανώς μηδέν
Πόλωση διηλεκτρικού -> σχετικές μετατοπίσεις φορτίων λόγω εξωτερικών πεδίων

Πολωσιμότητα

Άτομο χωρίς εξωτερικό πεδίο ->
σφαιρικά συμμετρικό ->
μηδέν συνολικό φορτίο
μηδέν πόλωση



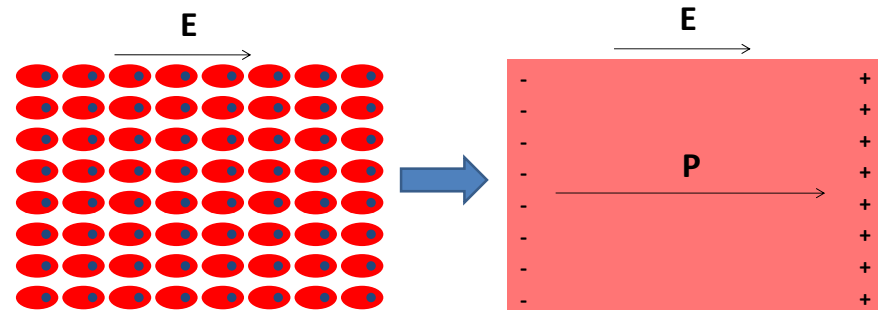
Άτομο σε εξωτερικό πεδίο ->
σφαιρικά ασυμμετρικό ->
μηδέν συνολικό φορτίο
μη-μηδενική πόλωση



Επαγόμενη πόλωση $P_{ind} = q\delta$

όμως $\delta \sim E \Rightarrow \mathbf{p}_{ind} \sim \mathbf{E}$ ορίζουμε την πολωσιμότητα α: $\mathbf{p}_{ind} = \alpha_e \cdot \mathbf{E}$

Πολωμένο διηλεκτρικό



Μακροσκοπική πόλωση P = συνολική διπολική ροπή ανα μονάδα όγκου

Πυκνωτής με διηλεκτρικό

Λόγω του πεδίου το διηλεκτρικό πολώνεται ->
-> φορτία πόλωσης Q_p στα άκρα του

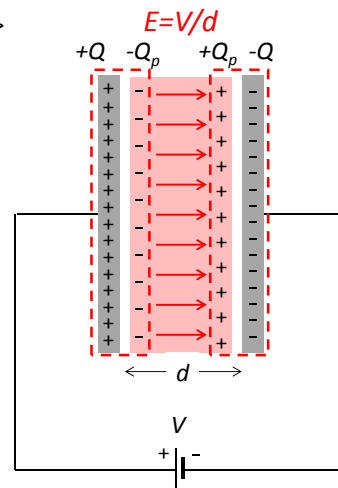
Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον πυκνωτή καθορίζεται μόνο από την πηγή και την απόσταση των οπλισμών του πυκνωτή

$$E = V/d = \text{σταθερό}$$

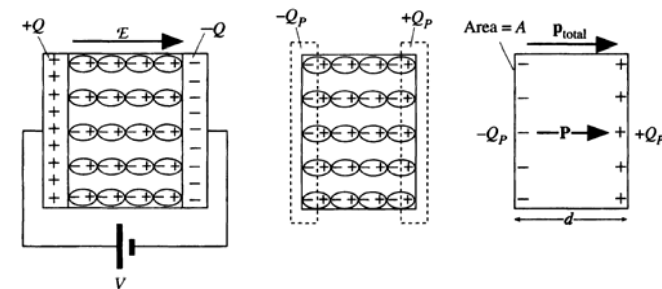
Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον πυκνωτή επίσης καθορίζεται από τα συνολικά φορτία στα δύο άκρα

$$Q - Q_p = Q_0 \rightarrow Q = Q_0 + Q_p$$

Μεγαλύτερο φορτίο στους οπλισμούς ->
-> μεγαλύτερη χωρητικότητα



Διάνυσμα πόλωσης



Πόλωση = η συνολική διπολική ροπή ανα μονάδα όγκου

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_{tot}}{\text{όγκος}} = \frac{1}{\text{όγκος}} [\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N] = N \mathbf{p}_{ave} = N \mathbf{p}_{ind} \quad N: \text{πλήθος μορίων ανα μονάδα όγκου}$$

Όμως: συνολική διπολική ροπή = $Q_p d$ Όγκος = Ad

$$P = \frac{p_{tot}}{\text{όγκος}} = \frac{Q_p d}{Ad} = \frac{Q_p}{A} = \sigma_p \quad \sigma_p: \text{επιφανειακή πυκνότητα φορτίων πόλωσης}$$

Ηλεκτρική επιδεκτικότητα

Το μέτρο της πόλωσης είναι ανάλογο της επιφανειακής πυκνότητας φορτίων πόλωσης

$$P = \sigma_p$$

Όμως είναι ανάλογη του εφαρμοζόμενου πεδίου

$$P = \chi_e \epsilon_0 E \quad \chi_e: \text{ηλεκτρική επιδεκτικότητα}$$

αλλά εξαρτάται και από την πολωσιμότητα των μορίων

$$p_{ind} = \alpha_e E \Rightarrow P = N p_{ind} = N \alpha_e E$$

άρα $\chi_e \epsilon_0 = N \alpha_e \Rightarrow \chi_e = \frac{N \alpha_e}{\epsilon_0}$ η ηλεκτρική επιδεκτικότητα είναι ανάλογη της πολωσιμότητας των μορίων και της πυκνότητάς τους

Ηλεκτρική επιδεκτικότητα

Το πεδίο καθορίζεται από την πηγή

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q_0}{A \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο επίσης καθορίζεται από την συνολική επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

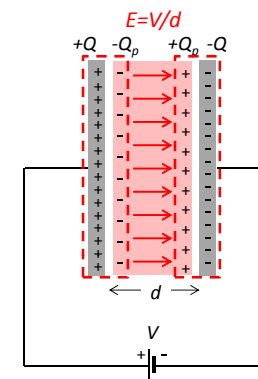
$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_p}{A \epsilon_0}$$

Η πόλωση καθορίζεται από την επιφανειακή πυκνότητα φορτίων πόλωσης

$$P = \sigma_p = \frac{Q_p}{A}$$

$$\sigma - \sigma_p = \epsilon_0 E \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E + P$$

$$\Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E + \chi_e \epsilon_0 E \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E$$



Η ηλεκτρική επιδεκτικότητα συνδέεται με την διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{N \alpha_e}{\epsilon_0}$

Ηλεκτρονιακή πολωσιμότητα

Η από το ηλεκτρικό πεδίο παραμορφώνει το άτομο και δημιουργεί ηλεκτρικό δίπολο

$$F_e = -ZeE$$

Ελκτικές δυνάμεις Coulomb δρουν ως δυνάμεις επαναφοράς

μικρή παραμόρφωση \rightarrow ανάλογη παραμόρφωσης

$$F_r = -\beta x$$

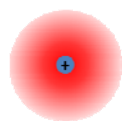
Σε ισορροπία αλληλοαναιρούνται

$$ZeE = \beta x \Rightarrow x = \frac{ZeE}{\beta}$$

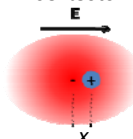
Η διπολική ροπή του ατόμου

$$p_{ind} = (Ze)x = \left(\frac{Z^2 e^2}{\beta} \right) E \Rightarrow \alpha_e = \frac{Z^2 e^2}{\beta}$$

απουσία πεδίου



σε πεδίο



Η «σταθερά ελατηρίου» β δεν μπορεί να μετρηθεί. Αντίθετα μπορεί να μετρηθεί η συχνότητα ταλάντωσης όταν πάψει το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

$$\text{συχνότητα} = \sqrt{\frac{\text{σταθερά ελατηρίου}}{\text{συνολική μάζα}}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta}{Z m_e}} \Rightarrow \beta = Z m_e \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \alpha_e = \frac{Z e^2}{m_e \omega_0^2}$$

Παράδειγμα 1

Για καθένα από τα παρακάτω ευγενή αέρια δίνεται ο ατομικός αριθμός και η πολωσιμότητα. Υπολογίστε την συχνότητα συντονισμού

	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn*
Z	2	10	18	36	56	
$\alpha_e \times 10^{-40}$ (F m ²)	0.18	0.45	1.7	2.7	4.4	5.9

Είχαμε βρει

$$\alpha_e = \frac{Z e^2}{m_e \omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{Z e^2}{m_e \alpha_e}}$$

Π.χ. για το Αργό

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(18)(1.6 \times 10^{-19} \text{C})^2}{(9.1 \times 10^{-31} \text{kg})(1.7 \times 10^{-40} \text{Fm}^2)}}$$

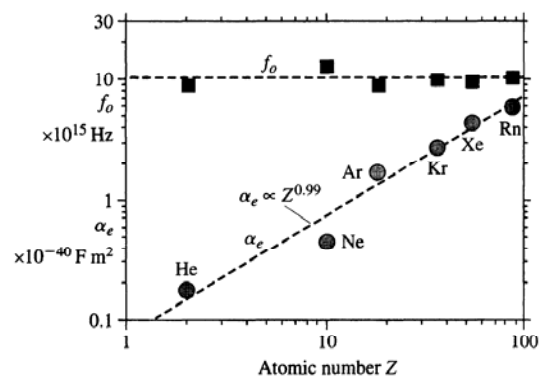
Μονάδες (χωρητικότητα Farad: F=C/V)

$$\sqrt{\frac{\text{C}^2}{\text{kgFm}^2}} = \sqrt{\frac{\text{C}^2}{\text{kg}(\text{C/V})\text{m}^2}} = \sqrt{\frac{\text{CV}}{\text{kgm}^2}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kgm}^2}} = \sqrt{\frac{\text{kgm}^2/\text{s}^2}{\text{kgm}^2}} = \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} = \text{s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{46.08 \times 10^{-38}}{15.47 \times 10^{-71}}} = \sqrt{2.98 \times 10^{33}} = 5.46 \times 10^{16} \text{ rad/s} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 8.69 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Παράδειγμα 1

	He	Ne	Ar	Kr	Xe	Rn*
Z	2	10	18	36	56	86
$\alpha_e \times 10^{-40} \text{ (F m}^2\text{)}$	0.18	0.45	1.7	2.7	4.4	5.9
$f_o \times 10^{15} \text{ (Hz)}$	8.90	12.6	8.69	9.76	9.36	10.2



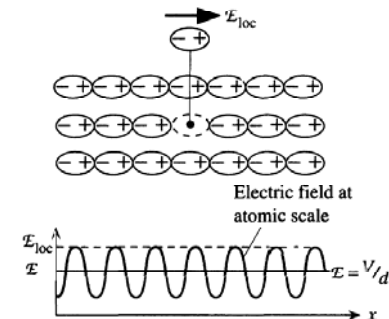
Η πολωσιμότητα αυξάνει με το Z, ενώ η συχνότητα δεν εξαρτάται από το Z!

Το τοπικό ηλεκτρικό πεδίο

Στην πράξη, το πεδίο που πολώνει ένα άτομο/μόριο είναι το τοπικό πεδίο

$$\text{τοπικό πεδίο } E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

μακροσκοπικό μέσο πεδίο \uparrow πεδίο λόγω γειτονικών διπόλων \uparrow



Βρέθηκε ολοκληρώνοντας το πεδίο που προκαλούν όλα τα δίπολα στην θέση ενός μορίου έχοντας αφαιρέσει πρώτα το μόριο

Τι σημαίνει αυτό για την πολωσιμότητα και την διηλεκτρική σταθερά?

η πολωσιμότητα είναι μικροσκοπική ιδιότητα $\rightarrow p_{ind} = \alpha_e E_{loc}$
 \rightarrow συνδέεται με το τοπικό πεδίο

η πόλωση είναι μικροσκοπική ιδιότητα $\rightarrow P = \chi_e \epsilon_0 E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = N p_{ind}$
 \rightarrow συνδέεται με το μακροσκοπικό πεδίο

Η σχέση Clausius-Mossotti

$$P = \chi_e \epsilon_0 E = N p_{ind} \quad p_{ind} = \alpha_e E_{loc} \quad E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$\chi_e \epsilon_0 E = N \alpha_e E_{loc} = N \alpha_e \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \Rightarrow \chi_e \epsilon_0 E = N \alpha_e \left(E + \frac{\chi_e \epsilon_0 E}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\Rightarrow \chi_e \epsilon_0 = N \alpha_e \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \Rightarrow \chi_e \epsilon_0 = N \alpha_e \frac{\chi_e + 3}{3} \Rightarrow 3 \chi_e \epsilon_0 = \chi_e N \alpha_e + 3 N \alpha_e$$

$$\Rightarrow \chi_e = \chi_e \frac{N \alpha_e}{3 \epsilon_0} + \frac{N \alpha_e}{\epsilon_0} \Rightarrow \chi_e \left(1 - \frac{N \alpha_e}{3 \epsilon_0} \right) = \frac{N \alpha_e}{\epsilon_0} \Rightarrow \chi_e = \frac{N \alpha_e / \epsilon_0}{1 - \frac{N \alpha_e}{3 \epsilon_0}}$$

$$\text{θέτοντας } \chi_e^0 = \frac{N \alpha_e}{\epsilon_0} \quad \text{τότε } \chi_e = \frac{\chi_e^0}{1 - \chi_e^0 / 3}$$

Η σχέση Clausius-Mossotti

Η σχέση Clausius-Mossotti μας λέει ότι στην πράξη η πόλωση είναι μεγαλύτερη από ότι θα περιμέναμε λόγω του πεδίου πόλωσης:

τα μόρια πολώνονται από το εξωτερικό πεδίο, αλλά επάγουν πόλωση και το ένα στο άλλο

$$\chi_e = \frac{\chi_e^0}{1 - \chi_e^0 / 3}$$

Η σχέση Clausius-Mossotti συνήθως γράφεται για την διηλεκτρική σταθερά

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{\chi_e^0}{1 - \chi_e^0 / 3} = \frac{1 - \chi_e^0 / 3 + \chi_e^0}{1 - \chi_e^0 / 3} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{1 + 2\chi_e^0 / 3}{1 - \chi_e^0 / 3}$$

ή λύνοντας ως προς χ_e^0

$$\epsilon_r = \frac{1 + 2\chi_e^0 / 3}{1 - \chi_e^0 / 3} = \frac{3 + 2\chi_e^0}{3 - \chi_e^0} \Rightarrow 3\epsilon_r - \epsilon_r \chi_e^0 = 3 + 2\chi_e^0 \Rightarrow \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\chi_e^0}{3} = \frac{N \alpha_e}{3 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 3(\epsilon_r - 1) = \chi_e^0 (2 + \epsilon_r)$$

Παράδειγμα 2

Βρείτε την διηλεκτρική σταθερά του Ar εάν:

$$\alpha_e = 1.7 \times 10^{-40} \text{ F m}^2, \rho = 1.8 \text{ g cm}^{-3}, A_R = 39.95 \text{ g mol}^{-1}$$

Πρέπει να βρούμε πρώτα την επιδεκτικότητα $\chi_e^0 = \frac{N\alpha_e}{\epsilon_0}$

Θα χρειαστούμε την πυκνότητα ατόμων $N[\text{m}^{-3}]$

$$N = \frac{\text{atoms}}{\text{m}^3} = \frac{\text{atoms mol}}{\text{mol m}^3} = \frac{\text{atoms g mol}}{\text{mol m}^3 \text{ g}} = \frac{N_A \cdot \rho}{A_B}$$

$$N = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(1.8 \text{ g cm}^{-3})}{(39.95 \text{ g mol}^{-1})} = 2.71 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 2.71 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Παράδειγμα 2

$$\text{Άρα } \chi_e^0 = \frac{N\alpha_e}{\epsilon_0} = \frac{(2.71 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.7 \times 10^{-40} \text{ F m}^2)}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1})} = 0.52$$

Αγνοώντας την συνεισφορά των διπόλων (αγνοώντας δηλαδή την Clausius-Mossotti)

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e^0 = 1.52$$

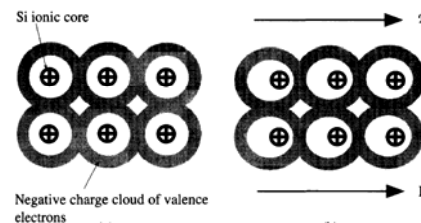
Με την Clausius-Mossotti

$$\epsilon_r = \frac{1 + 2\chi_e^0/3}{1 - \chi_e^0/3} = \frac{1 + 2 \times 0.52/3}{1 - 0.52/3} = 1.63$$

Ηλεκτρονική πόλωση στα ομοιοπολικά στερεά

Στα ομοιοπολικά στερεά οι δεσμοί σχηματίζονται από ηλεκτρόνια σθένους
-> πιο εντοπισμένα ανάμεσα στα άτομα
-> πιο χαλαρά συνδεδεμένα με τους πυρήνες

-> πιο εύκολα πολώσιμα



Για παράδειγμα, Si και Ge έχουν ίδιο αριθμό ηλεκτρονίων σθένους (4) και ίδια ατομική δομή (διαμαντιού). Όμως το Ge έχει μια επιπλέον στοιβάδα συμπληρωμένη:

-> τα ηλεκτρόνια σθένους πιο χαλαρά συνδεδεμένα με τον πυρήνα
-> πιο μεγάλη πολωσιμότητα

-> πιο μεγάλη διηλεκτρική σταθερά: $\epsilon_{r, Si} = 11.9$ $\epsilon_{r, Ge} = 16$

Η πολωσιμότητα καθορίζεται από τον αριθμό των ηλεκτρονίων σθένους και από το πόσο ισχυρά συνδέονται με τον πυρήνα

Παράδειγμα 3

Έστω καθαρός κρύσταλλος Si με $\epsilon_r = 11.9$

(α) Πόση είναι η ηλεκτρονική πολωσιμότητα;

(β) Εάν εφαρμόσουμε τάση στις άκρες ενός δείγματος, ποια η διαφορά μεταξύ τοπικού και εφαρμοζόμενου πεδίου;

(γ) Ποια η συχνότητα συντονισμού των ηλεκτρονίων σθένους;

(δίνεται $A_B = 28 \text{ g/mol}$, $\rho = 2.329 \text{ g/cm}^3$)

$$\text{(α) Λύνουμε την εξίσωση Clausius-Mossotti } \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha_e}{3\epsilon_0} \Rightarrow \alpha_e = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

$$\text{Χρειαζόμαστε το } N \text{ (αριθμός ατόμων ανά κυβικό μέτρο) } N = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(2.329 \text{ g cm}^{-3})}{(28 \text{ g mol}^{-1})} = 5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\Rightarrow \alpha_e = \frac{3(8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1})}{(5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})} \frac{11.9 - 1}{11.9 + 2} = 4.17 \times 10^{-40} \text{ F m}^2$$

Παράδειγμα 3

(β) Εάν εφαρμόσουμε τάση στις άκρες ενός δείγματος, ποια η διαφορά μεταξύ τοπικού και εφαρμοζόμενου πεδίου;

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} = E + \frac{(\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{loc}}{E} = 1 + \frac{(\epsilon_r - 1)}{3} = \frac{\epsilon_r + 2}{3} = \frac{13.9}{3} = 4.63$$

(γ) Ποια η συχνότητα συντονισμού των ηλεκτρονίων σθένους;

$$\alpha_e = \frac{Ze^2}{m_e \omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{m_e \alpha_e}}$$

Θα θεωρήσουμε ότι μόνο τα ηλεκτρόνια σθένους συνεισφέρουν, οπότε $Z=4$

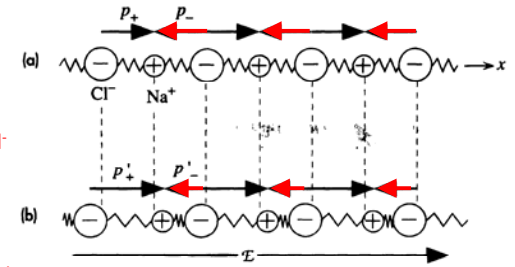
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(4.17 \times 10^{-40} \text{ F m}^2)}} = 1.65 \times 10^{16} \text{ rad/s} = 2.6 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Άλλοι μηχανισμοί πόλωσης

Ιοντική πόλωση

Σε ιοντικούς κρυστάλλους όπως NaCl
-> μετακίνηση μόνιμων διπόλων, πχ Na^+ , Cl^-

- (α) χωρίς πεδίο
-> μηδέν συνολική πόλωση
- (β) με πεδίο
-> τα ιόντα μετακινούνται, πόλωση μη-μηδενική



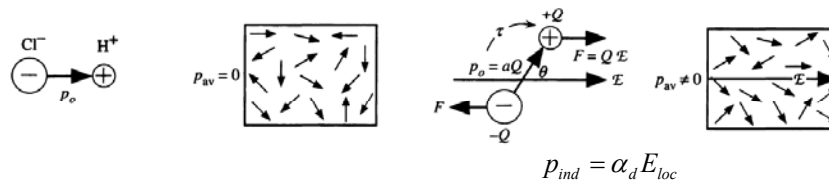
Ισχύουν οι ίδιες σχέσεις όπως και στην ηλεκτρονιακή πόλωση

$$p_{ind} = \alpha_i E_{loc} \quad P = N_i p_{ind} = N_i \alpha_i E_{loc}$$

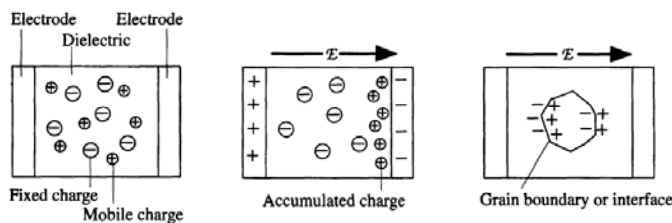
$$P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E \quad \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N_i \alpha_i}{3\epsilon_0}$$

Άλλοι μηχανισμοί πόλωσης

Πόλωση προσανατολισμού



Διεπιφανειακή πόλωση



Συνολική πόλωση

Συνεισφέρουν προσθετικά όλοι οι μηχανισμοί πόλωσης

$$p_{ind} = \alpha_e E_{loc} + \alpha_i E_{loc} + \alpha_d E_{loc}$$

Η Clausius-Mossotti ισχύει μόνο για τις ηλεκτρονιακές και ιοντικές

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N_e \alpha_e + N_i \alpha_i}{3\epsilon_0}$$

Example	Polarization	Static ϵ_r	Comment
Ar gas	Electronic	1.0005	Small N in gases: $\epsilon_r \approx 1$
Ar liquid ($T < 87.3 \text{ K}$)	Electronic	1.53	van der Waals bonding
Si crystal	Electronic polarization due to valence electrons	11.9	Covalent solid; bond polarization
NaCl crystal	Ionic	5.90	Ionic crystalline solid
CsCl crystal	Ionic	7.20	Ionic crystalline solid
Water	Orientational	80	Dipolar liquid
Nitromethane (27°C)	Orientational	34	Dipolar liquid
PVC (polyvinyl chloride)	Orientational	7	Dipole orientations partly hindered in the solid

Εξάρτηση από την συχνότητα

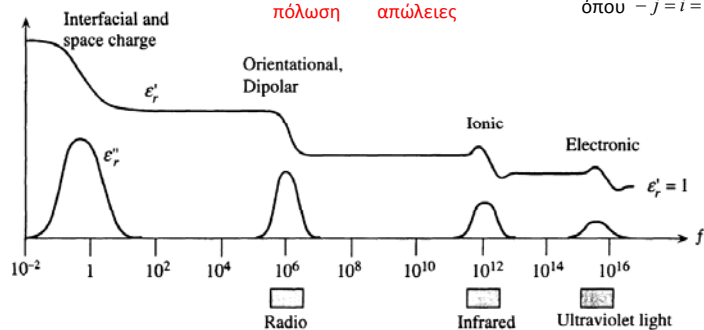
Κάθε μηχανισμός συντονίζεται σε άλλη συχνότητα λόγω διαφορετικών μαζών των φορτίων (πχ ηλεκτρόνια, ιόντα, μόνιμα διπολικά μόρια, κτλ)

-> η διηλεκτρική σταθερά είναι συνάρτηση της συχνότητας $\epsilon_r(\omega)$

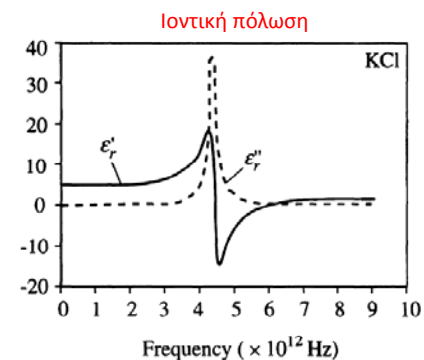
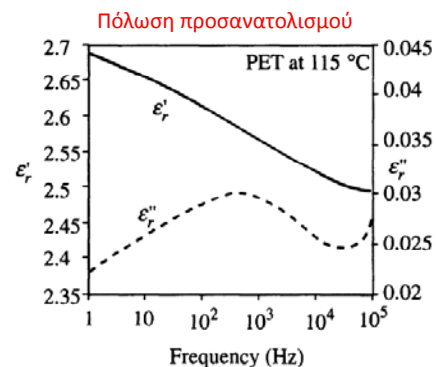
και είναι μιγαδική $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega)$

↑ ρυθμίζει την πόλωση
↑ ρυθμίζει τις απώλειες

ή στα βιβλία μηχανικών
 $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) - j\epsilon_r''(\omega)$
όπου $-j = i = \sqrt{-1}$



Παραδείγματα φασμάτων διηλεκτρικής



Παράδειγμα 4

Για τον κρύσταλλο CsCl υπολογίστε την διηλεκτρική σταθερά. Θα είναι ίδια για όλες τις συχνότητες?

Δίνεται: $\alpha_e^{Cs^+} = 3.35 \times 10^{-40} \text{ Fm}^2$ $\alpha_e^{Cl^-} = 3.4 \times 10^{-40} \text{ Fm}^2$ $\alpha_i^{Cs^+-Cl^-} = 6 \times 10^{-40} \text{ Fm}^2$
πλεγματική σταθερά $a=0.412 \text{ nm}$

Πρώτα να βρούμε την αριθμητική πυκνότητα. Σε κάθε κυψελίδα έχουμε ένα ζεύγος CsCl

$$\text{Άρα } N_e = N_i = a^{-3} = 1/(4.12 \times 10^{-10} \text{ m})^3 = 1.43 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\text{Λύνουμε την Clausius-Mossotti } \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N_i \alpha_e^{Cs^+} + N_i \alpha_e^{Cl^-} + N_i \alpha_i^{Cs^+-Cl^-}}{3\epsilon_0}$$

$$= \frac{(1.43 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(3.35 + 3.4 + 6) \times 10^{-40} \text{ Fm}^2}{3(8.85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1})} = 0.686$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{1 + 2 \times 0.686 / 3}{1 - 0.686 / 3} \Rightarrow \epsilon_r = 7.56$$

Παράδειγμα 4

Ο προηγούμενος υπολογισμός υπέθετε ότι και οι δύο μηχανισμοί πόλωσης είναι ενεργοί. Σε χαμηλές συχνότητες (π.χ. υπέρυθρο) αυτό ισχύει. Όμως σε πολύ μεγάλες συχνότητες ο ιοντικός μηχανισμός γίνεται ανενεργός καθώς τα πολύ βαριά ιόντα αδυνατούν να ακολουθήσουν την κίνηση. Τότε ενεργός είναι μόνο ο ηλεκτρονικός

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N_i \alpha_e^{Cs^+} + N_i \alpha_e^{Cl^-}}{3\epsilon_0} = \frac{(1.43 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(3.35 + 3.4) \times 10^{-40} \text{ Fm}^2}{3(8.85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1})} = 0.363$$

$$\epsilon_r = 2.71$$

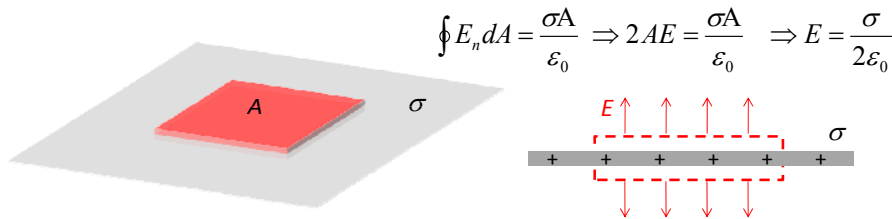
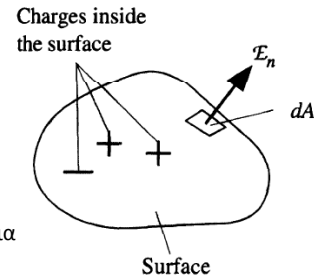
Στα ιοντικά στερεά είναι μεγάλη η διαφορά που έχει η διηλεκτρική συνάρτηση σε διαφορετικές συχνότητες

Νόμος του Gauss

Το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε μια κλειστή επιφάνεια είναι ίσο με το συνολικό φορτίο που περικλείει η κλειστή επιφάνεια

$$\oint E_n dA = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss σε φορτισμένη επιφάνεια
 -> πυκνότητα φορτίου σ
 -> Gauss κλειστή επιφάνεια ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



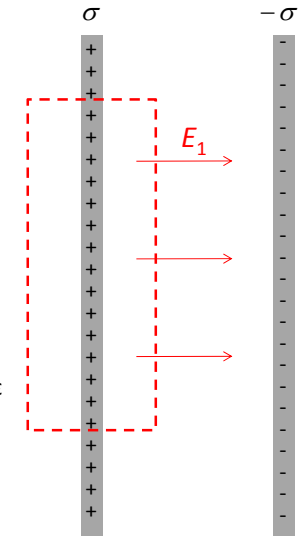
Νόμος του Gauss στον πυκνωτή

Λόγω της ύπαρξης της δεύτερης πλάκας, έχουμε πεδία μόνο μέσα στον πυκνωτή

$$\oint E_n dA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow AE = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που γνωρίζαμε

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q/C}{d} = \frac{Q}{d \epsilon_0 A} = \frac{Q}{A \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Νόμος του Gauss στον πυκνωτή

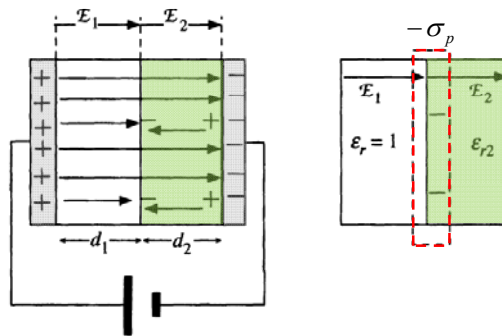
Τι γίνεται όταν ο μισός πυκνωτής γεμίσει με κάποιο διηλεκτικό;
 -> φορτία πόλωσης στο διηλεκτικό
 -> διαφορετικά πεδία

Έστω φορτία πόλωσης με επιφανειακή πυκνότητα σ_p

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint E_n dA = \frac{-\sigma_p A}{\epsilon_0} \Rightarrow A(E_2 - E_1) = \frac{-\sigma_p A}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = E_2 + \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = E_2 + \frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\text{όμως } P = \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E_2 \Rightarrow E_1 = E_2 + (\epsilon_{r2} - 1)E_2 \Rightarrow E_1 = \epsilon_{r2}E_2$$



Συνοριακές συνθήκες 1

Γενικεύουμε στην περίπτωση των δύο διηλεκτρικών

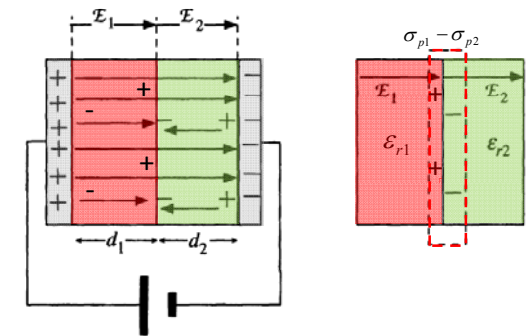
$$\oint E_n dA = \frac{(\sigma_{p1} - \sigma_{p2})A}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow A(E_2 - E_1) = \frac{(\sigma_{p1} - \sigma_{p2})A}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 - E_1 = \frac{\sigma_{p1} - \sigma_{p2}}{\epsilon_0} = \frac{P_1 - P_2}{\epsilon_0}$$

όμως

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E_1 \\ P_2 &= \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_2 - E_1 = (\epsilon_{r1} - 1)E_1 - (\epsilon_{r2} - 1)E_2$$

Για ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στην διεπιφάνεια
 $\Rightarrow \epsilon_{r1}E_1 = \epsilon_{r2}E_2$



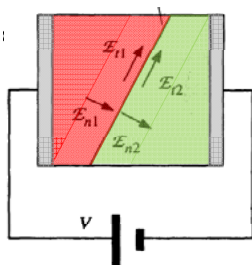
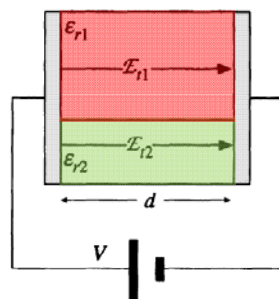
Συνοριακές συνθήκες 2

Στην περίπτωση δύο παράλληλων διηλεκτρικών

$$E_1 = E_2 = \frac{V}{d}$$

Για ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο στην διεπιφάνεια

$$E_1 = E_2$$



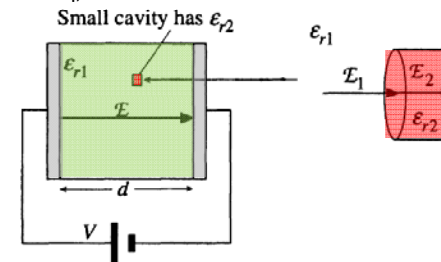
Γενική περίπτωση:

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$$

$$\epsilon_{r1} E_1^{\perp} = \epsilon_{r2} E_2^{\perp}$$

Παράδειγμα 5

Έστω ο παρακάτω πυκνωτής με $\epsilon_{r1}=11.9$. Έστω επίσης ότι έχει μια μικρή αστοχία όπου έχει δημιουργηθεί μια μικρή οπή με $\epsilon_{r2}=1$. Το πεδίο μέσα στην οπή πως σχετίζεται με το πεδίο μέσα στον πυκνωτή;



Το πεδίο μέσα στον πυκνωτή καθορίζεται από το δυναμικό και το πάχος του πυκνωτή

$$E_1 = \frac{V}{d}$$

Συνοριακές συνθήκες στην αστοχία: πεδία κάθετα στην διεπιφάνεια

$$\epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_{r2} E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{\epsilon_{r1} E_1}{\epsilon_{r2}} \Rightarrow E_2 = 11.9 \frac{V}{d}$$

Παράδειγμα 6

Λύστε την περίπτωση όπου ένα λεπτό διηλεκτρικό εισέρχεται στην μέση του πυκνωτή

Οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλουν

$$\epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_{r2} E_2$$

Το ολοκλήρωμα του πεδίου δίνει την τάση

$$E_1(d-t) + E_2 t = V$$

Λύνουμε ως προς E_2

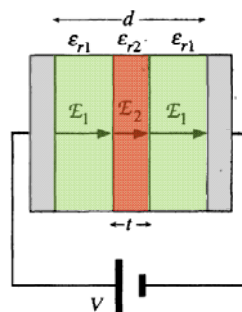
$$E_1 = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} E_2 \quad \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} E_2 (d-t) + E_2 t = V$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{V}{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}(d-t) + t} = \frac{\epsilon_{r1} V}{\epsilon_{r2} \left[1 - \frac{t}{d} \left(1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \right) \right]}$$

$$E_1 = \frac{V}{d} \left[1 - \frac{t}{d} \left(1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \right) \right]^{-1}$$

Εάν $t \ll d$ τότε

$$E_1 \cong \frac{V}{d} \quad E_2 \cong \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \frac{V}{d}$$



Ο νόμος του Gauss γύρω από τα ηλεκτρόδια

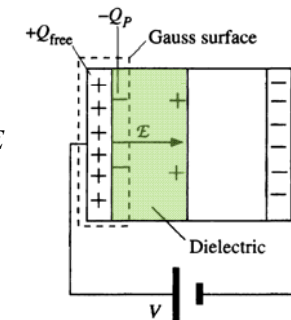
$$\oint E_n dA = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 A E = Q_{free} - Q_p$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 A E = Q_{free} - A P = Q_{free} - A \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 A E + A \epsilon_0 \epsilon_r E - A \epsilon_0 E = Q_{free}$$

$$\Rightarrow A \epsilon_0 \epsilon_r E = Q_{free} \Rightarrow E = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma_{tot}}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_{free} = \epsilon_r \sigma_{tot}$$



Που είναι ο γνωστός νόμος για την αύξηση της χωρητικότητας με αξιοποίηση διηλεκτρικού

Αντίθετα θα μπορούσαμε να είχαμε ξεκινήσει κατευθείαν από τον νόμο του Gauss τροποποιημένο ώστε να παίρνει υπόψη μόνο τα ελεύθερα φορτία

$$\oint E_n dA = \frac{Q_{free}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

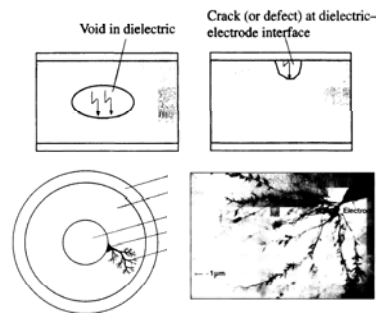
Διηλεκτρική αντοχή και διάσπαση μόνωσης

- Σε πολύ μεγάλες τάσεις, μπορούν να δημιουργηθεί ρεύμα μέσα στο διηλεκτρικό
 -> ηλεκτρονική διάσπαση χιονοστιβάδας
 -> διηλεκτρική κατάρρευση
 -> μόνιμη καταστροφή των στερεών διηλεκτρικών

Διηλεκτρική αντοχή E_{br} : το μέγιστο πεδίο που μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα διηλεκτρικό χωρίς να προκαλέσει διηλεκτρική διάσπαση

Η διηλεκτρική αντοχή εξαρτάται από:

- Προσμίξεις
- Ατέλειες μικροδομής
- Γεωμετρία δείγματος
- Φύση ηλεκτροδίων
- Θερμοκρασία
- Υγρασία
- Διάρκεια εφαρμογής του πεδίου
- Συχνότητα του πεδίου



Ηλεκτρονική διάσπαση χιονοστιβάδας

Έστω ηλεκτρόνιο στην ζώνη αγωγιμότητας

Εφαρμοζόμενο πεδίο: E

Μέση ελεύθερη διαδρομή: l

Η κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει το ηλεκτρόνιο είναι $K = eEl$

Αυτό το ηλεκτρόνιο μπορεί να προσκρούσει σε ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους

εαν $eEl > E_g$ τότε το ηλεκτρόνιο από την ΖΣ θα μεταπηδήσει στην ΖΑ

- > 2 ηλεκτρόνια, που με την σειρά τους θα διεγείρουν άλλα 2, κ.ο.κ
- > μεγάλο ρεύμα και θέρμανση του διηλεκτρικού -> κατάρρευση

$$\text{Διηλεκτρική αντοχή } E_{br} \approx \frac{E_g}{el}$$

Τα αρχικά ηλεκτρόνια προκύπτουν από προσμίξεις, από τις επαφές, με θερμική διέγερση, κτλ

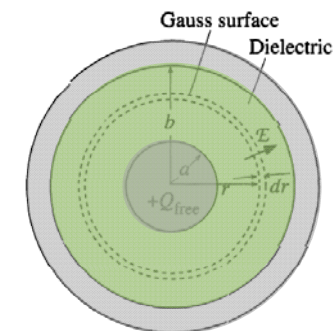
Διηλεκτρική αντοχή

Dielectric Medium	Dielectric Strength	Comments
Atmosphere at 1 atm pressure	31.7 kV cm ⁻¹ at 60 Hz	1 cm gap. Breakdown by electron avalanche by impact ionization.
SF ₆ gas	79.3 kV cm ⁻¹ at 60 Hz	Used in high-voltage circuit breakers to avoid discharges.
Polybutene	> 138 kV cm ⁻¹ at 60 Hz	Liquid dielectric used as oil filler and HV pipe cables.
Transformer oil	128 kV cm ⁻¹ at 60 Hz	
Amorphous silicon dioxide (SiO ₂) in MOS technology	10 MV cm ⁻¹ dc	Very thin oxide films without defects. Intrinsic breakdown limit.
Borosilicate glass	10 MV cm ⁻¹ duration of 10 μs 6 MV cm ⁻¹ duration of 30 s	Intrinsic breakdown. Thermal breakdown.
Polypropylene	295–314 kV cm ⁻¹	Likely to be thermal breakdown or electrical treeing.

Παράδειγμα 7

Έστω το ομοαξονικό καλώδιο στο διπλανό σχήμα.

Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss για να υπολογίσετε την χωρητικότητα του ως πυκνωτή



Έστω φορτίο Q_{free} στον εσωτερικό αγωγό

Έστω το καλώδιο έχει μήκος L

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss σε ακτίνα r

$$2\pi rLE = \frac{Q_{free}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q_{free}}{2\pi r L \epsilon_0 \epsilon_r}$$

Η διαφορά δυναμικού σε πάχος dr είναι

$$dV = -E dr \Rightarrow dV = -\frac{Q_{free}}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{dr}{r} = -\left(\frac{Q_{free}}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r}\right) \frac{dr}{r}$$

Ολοκληρώνοντας

$$\int_a^b dV = -\left(\frac{Q_{free}}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r}\right) \int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow V_b - V_a = -\left(\frac{Q_{free}}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r}\right) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{χωρητικότητα} \\ C = Q_{free} / \Delta V = \\ = \frac{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7

Σε ποιο σημείο έχω μέγιστο πεδίο;

$$\text{Βρήκαμε πριν } E = \frac{Q_{free}}{2\pi r L \epsilon_0 \epsilon_r} C = Q_{free} / \Delta V = \frac{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(b/a)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\Delta V}{r \ln(b/a)} \Rightarrow E_{max} = \frac{\Delta V}{a \ln(b/a)}$$

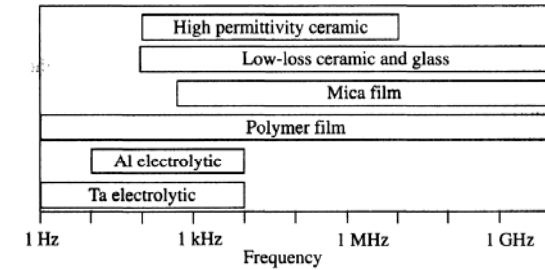
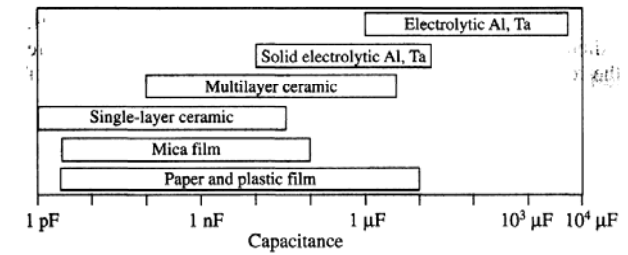
Σε ποια τάση προκαλείται διάσπαση διηλεκτρικού;

$$\text{Διάσπαση ξεκινάει όταν } E_{max} = E_{br} \Rightarrow \Delta V_{br} = a \ln(b/a) E_{br}$$

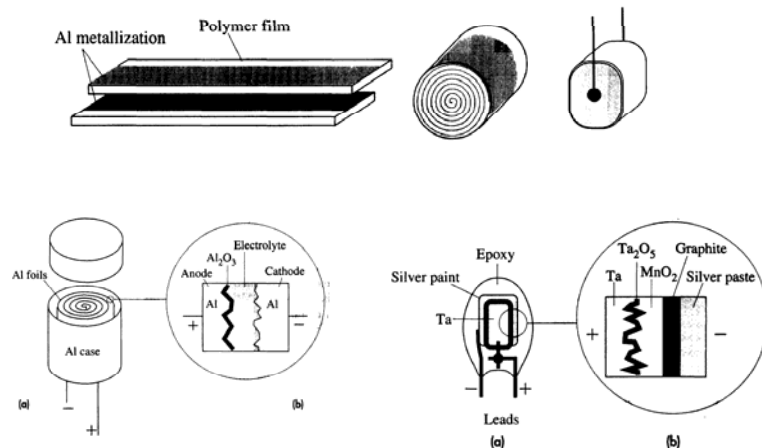
Σε ποια τάση προκαλείται διάσπαση αέρα σε μια φυσαλίδα πάνω στον εσωτερικό αγωγό?

$$\text{Το πεδίο μέσα στην φυσαλίδα αέρα είναι κατά } \epsilon_r \text{ φορές μεγαλύτερο } \Rightarrow \Delta V_{br}^{air} = \epsilon_r a \ln(b/a) E_{br}^{air}$$

Διηλεκτρικά υλικά πυκνωτών

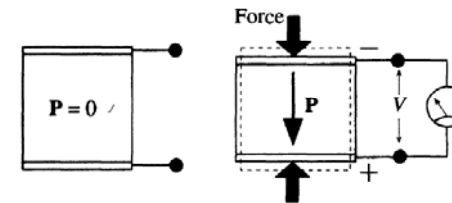


Κατασκευή πυκνωτών

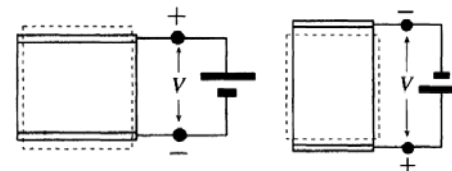


Πιεζοηλεκτρισμός

Εμφανίζεται σε συγκεκριμένα υλικά με δύο συμπληρωματικούς τρόπους



Εμφάνιση τάσης στα άκρα του κρυστάλλου κατά την εφαρμογή μηχανικής παραμόρφωσης

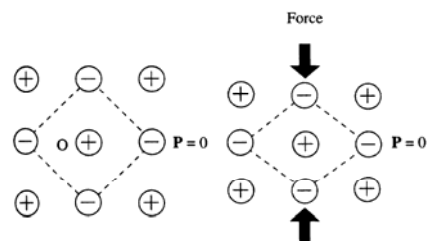


Εμφάνιση μηχανικής παραμόρφωσης του κρυστάλλου κατά την εφαρμογή τάσης στα άκρα του

Πιεζοηλεκτρισμός

Απαραίτητη προϋπόθεση ο κρύσταλλος να μην έχει κέντρο συμμετρίας
-> π.χ. χαλαζίας (κρυσταλλικό SiO_2), BaTiO_3 , κ.α.

Για παράδειγμα ο κρύσταλλος του NaCl (κυβική συμμετρία, κεντρο-συμμετρικό)
-> κάθε διάνουσμα r από το κέντρο που αντιστοιχεί σε φορτίο, το $-r$ αντιστοιχεί στο ίδιο φορτίο



Στην ελεύθερη κατάσταση:
το κέντρο των θετικών φορτίων και το κέντρο των αρνητικών φορτίων συμπίπτει -> $P=0$

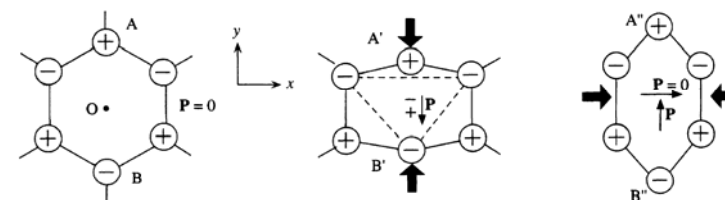
Στην παραμορφωμένη κατάσταση:
το κέντρο των θετικών φορτίων και το κέντρο των αρνητικών φορτίων συμπίπτει -> $P=0$

Κρύσταλλοι με κυβική συμμετρία συνήθως είναι κέντρο-συμμετρικοί και άρα δεν εμφανίζουν πιεζοηλεκτρισμό

Πιεζοηλεκτρισμός

Κρύσταλλοι που δεν είναι κέντρο-συμμετρικοί εμφανίζουν πιεζοηλεκτρισμό

Για παράδειγμα η εξαγωνική κυψελίδα παρακάτω δεν είναι κεντρο-συμμετρική
-> κάθε διάνουσμα r από το κέντρο που αντιστοιχεί σε φορτίο, το $-r$ αντιστοιχεί στο αντίθετο φορτίο

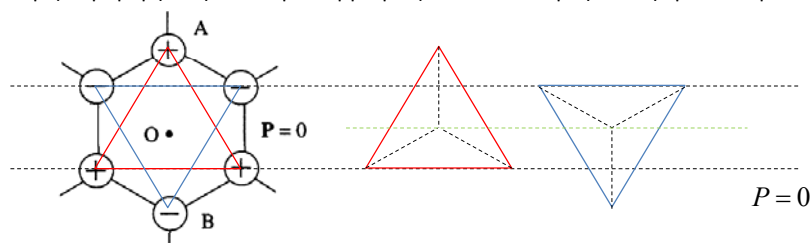


Στην ελεύθερη κατάσταση:
το κέντρο των θετικών φορτίων και το κέντρο των αρνητικών φορτίων συμπίπτει -> $P=0$

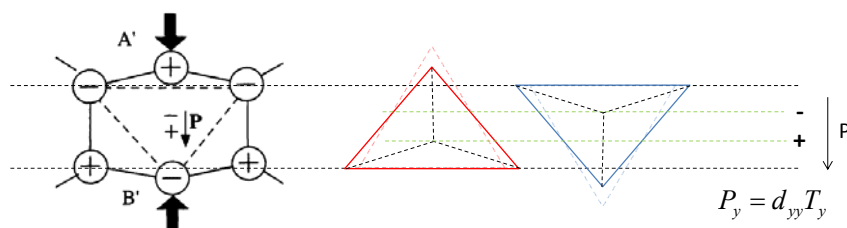
Στην παραμορφωμένη κατάσταση:
το κέντρο των θετικών φορτίων και το κέντρο των αρνητικών φορτίων ΔΕΝ συμπίπτει -> $P \neq 0$

Μη κεντρο-συμμετρικοί κρύσταλλοι

Χωρίς παραμόρφωση τα κέντρα συμμετρίας θετικών και αρνητικών φορτίων συμπίπτουν

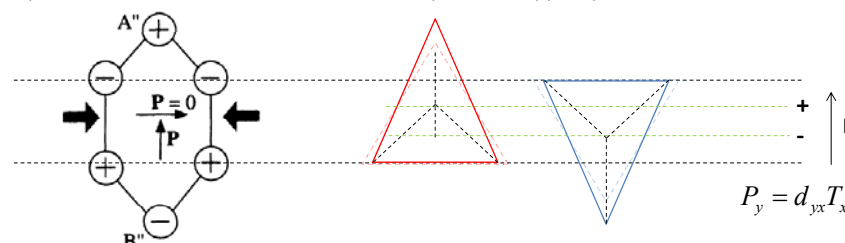


Με παραμόρφωση τα κέντρα συμμετρίας θετικών και αρνητικών φορτίων διαχωρίζονται



Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Με παραμόρφωση τα κέντρα συμμετρίας θετικών και αρνητικών φορτίων διαχωρίζονται, όμως η πόλωση είναι σε διεύθυνση κάθετη με την εφαρμοζόμενη τάση



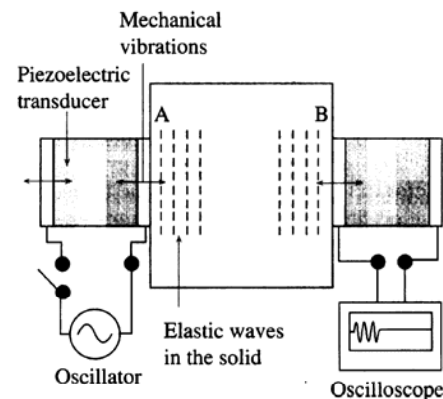
Γενικά μηχανική τάση και πόλωση δεν είναι στην ίδια διεύθυνση
-> ταυιστική σχέση, για παράδειγμα στον εξαγωνικό κρύσταλλο $P_y = d_{yx} T_x + d_{yy} T_y + d_{yz} T_z$

Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο	$P_i = d_{ij} T_j$	η εφαρμογή μηχανικής τάσης επιφέρει ηλεκτρική πόλωση
Αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο	$S_j = d_{ij} E_i$	η εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου επιφέρει μηχανική παραμόρφωση
d_{ij} : πιεζοηλεκτρικοί συντελεστές, ίδιοι και στις δύο περιπτώσεις		

Εφαρμογές πιεζοηλεκτρικών

Ηλεκτρομηχανικοί μετατροπείς:

- > μετατροπή ηλεκτρικού σήματος σε μηχανική παραμόρφωση και αντίστροφα
- > δημιουργία και ανίχνευση υπερηχητικών κυμάτων σε στερεά, μικρόφωνα, επιταχυνσιόμετρα, κ.α.



Χαρακτηρισμός στερεού

- από χρόνο διάδοσης κυμάτων ->
- > ταχύτητα κυμάτων ->
- > ελαστική σταθερά

- Από σκέδαση κυμάτων ->
- > εσωτερικές ατέλειες και ρωγμές ->
- > μη καταστροφικός έλεγχος

Παράγοντας ηλεκτρομηχανικής σύζευξης

$$k^2 = \frac{\text{ηλεκτρική ενέργεια που μετατρέπεται σε μηχανική}}{\text{εισερχόμενη ηλεκτρική ενέργεια}}$$

ή

$$k^2 = \frac{\text{μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε ηλεκτρική}}{\text{εισερχόμενη μηχανική ενέργεια}}$$

Crystal	d (m V ⁻¹)	k	Comment
Quartz (crystal SiO ₂)	2.3×10^{-12}	0.1	Crystal oscillators, ultrasonic transducers, delay lines, filters
Rochelle salt (NaKC ₄ H ₄ O ₆ · 4H ₂ O)	350×10^{-12}	0.78	
Barium titanate (BaTiO ₃)	190×10^{-12}	0.49	Accelerometers
PZT, lead zirconate titanate (PbTi _{1-x} Zr _x O ₃)	480×10^{-12}	0.72	Wide range of applications including earphones, microphones, spark generators (gas lighters, car ignition), displacement transducers, accelerometers
Polyvinylidene fluoride (PVDF)	18×10^{-12}	—	Must be poled; heated, put in an electric field and then cooled. Large area and inexpensive

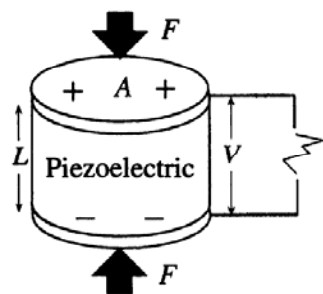
Παράδειγμα 8

Πιεζοηλεκτρική γεννήτρια σπινθήρων:

- > αναπτήρες, ανάφλεξη μηχανών και αυτοκινήτων

Μηχανισμός:

- > η εφαρμογή δύναμης στα άκρα επιφέρει φορτία στους οπλισμούς
- > διαφορά δυναμικού -> σπινθήρας εαν γίνει διηλεκτρική κατάρρευση



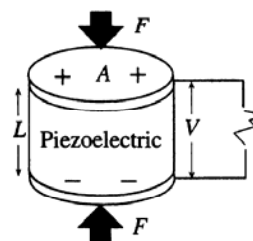
Πόση δύναμη απαιτείται για την δημιουργία σπινθήρα;

Δίνονται:

- πιεζοηλεκτρικός συντελεστής $d=250 \times 10^{-12}$ m/V
- διηλεκτρική σταθερά στον πυκνωτή $\epsilon_r=1000$
- μήκος πυκνωτή $L=10$ mm
- εμβαδό πυκνωτή $A=7$ mm²
- τάση διάσπασης αερίου στο διάκενο $V_c=3.5$ kV

Παράδειγμα 8

Πιεζοηλεκτρική γεννήτρια σπινθήρων



Η πόλωση είναι ανάλογη της τάσης T και άρα της δύναμης

$$P = dT = d \frac{F}{A}$$

Η πόλωση είναι ίση με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίων πόλωσης

$$P = \sigma_p \Rightarrow Q = A \sigma_p = AP$$

Τα φορτία στα άκρα αντιστοιχούν σε διαφορά δυναμικού

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{L}} = \frac{AP}{\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{L}} = \frac{LP}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{LdF}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$

Η απαιτούμενη δύναμη είναι

$$F_c = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A V_c}{Ld} = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(1000)(7 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(3500 \text{ V})}{(0.01 \text{ m})(250 \times 10^{-12} \text{ m/V})} = 86.7 \text{ N}$$

Παράδειγμα 8

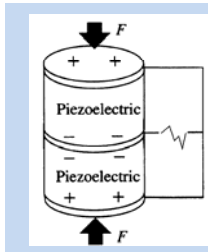
Η δύναμη $F_c = 86.7 \text{ N}$ αντιστοιχεί σε μάζα $m_c = \frac{F_c}{g} = \frac{86.7 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 8.85 \text{ kg}$

Η δύναμη πρέπει να ασκείται απότομα, αλλιώς τα φορτία διαρρέουν ή εξουδετερώνονται

Η επαγόμενη τάση ανά μονάδα δύναμης

$$\frac{V}{F} = \frac{Ld}{\epsilon_0 \epsilon_r A} = \left(\frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right) \frac{L}{A}$$

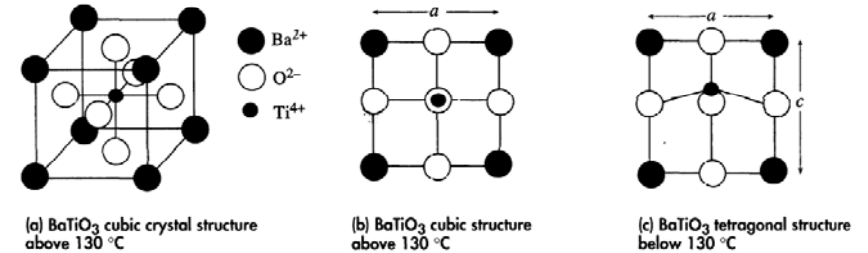
Ο πιεζοηλεκτρικός συντελεστής τάσης g εξαρτάται μόνο από το είδος του πιεζοηλεκτρικού υλικού $g = \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r}$



Διάφοροι συνδυασμοί μπορούν να δημιουργηθούν ώστε να αυξηθεί η τάση. Για παράδειγμα δίπλα η τάση θα είναι διπλάσια σε σχέση με την απλή διάταξη.

Σιδηροηλεκτρικοί κρύσταλλοι

Κρύσταλλοι που είναι μόνιμα πολωμένοι
-> κατά αναλογία με τους σιδηρομαγνητικά υλικά (μόνιμους μαγνήτες)



Για παράδειγμα στο BaTiO₃, για θερμοκρασίες <130 C αλλάζει η δομή του υλικού και μετακινείται ένα άτομο Ti⁴⁺ από το κέντρο φορτίου

Οφείλεται σε αλληλεπιδράσεις μεταξύ μακρινών γειτόνων που συνολικά ρίχνουν την συνολική ενέργεια

Η κρίσιμη θερμοκρασία κάτω από την οποία γίνεται η αλλαγή φάσης ονομάζεται θερμοκρασία Curie T_c

Σιδηροηλεκτρικοί κρύσταλλοι

Υπό συνθήκες αυτή η αυθόρμητη πόλωση μπορεί να είναι μόνιμη

-> θερμαίνουμε τον κρύσταλλο πάνω από T_c

-> εφαρμόζουμε ηλεκτρικό πεδίο

-> αφήνουμε τον κρύσταλλο να ψυχθεί κάτω από T_c

Με την εφαρμογή πεδίου όλα τα δίπολα κάθε κυψελίδας μένουν ευθυγραμμισμένα με την διεύθυνση του εξωτερικού πεδίου

-> μόνιμη πόλωση

Διεύθυνση πόλωσης = σιδηροηλεκτρικός άξονας

Στα σιδηροηλεκτρικά η πόλωση είναι μόνιμη, ακόμα και για μηδέν εξωτερικό πεδίο

-> η σχέση μεταξύ πόλωσης και πεδίου ισχύει μόνο για σχετικές μεταβολές

$$\Delta P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \Delta E$$

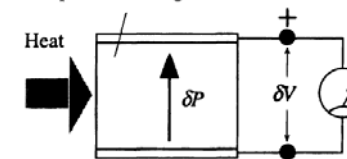
Πυροηλεκτρικοί κρύσταλλοι

Οι σιδηροηλεκτρικοί κρύσταλλοι είναι και πυροηλεκτρικοί

-> μεταβολή στην θερμοκρασία μεταβάλλει το μέγεθος της κυψελίδας και άρα την πόλωση

-> μεταβολή της θερμοκρασίας μεταβάλλει την αυθόρμητη πόλωση λόγω θερμικής κίνησης

Temperature change = δT



Πυροηλεκτρικός συντελεστής $p = \frac{\delta P}{\delta T}$

Material	ϵ_r'	$\tan \delta$	Pyroelectric Coefficient ($\times 10^{-6} \text{ C m}^{-2} \text{ K}^{-1}$)	Curie Temperature ($^{\circ}\text{C}$)
BaTiO ₃	4100 \perp polar axis; 160 //polar axis	7×10^{-3}	20	130
LiTaO ₃	47	5×10^{-3}	230	610
PZT modified for pyroelectric	290	2.7×10^{-3}	380	230
PVDF, polymer	12	0.01	27	80

Παράδειγμα 9

Έστω πυροηλεκτρικό κεραμικό PZT πάχους 0.1 mm (η απόσταση ανάμεσα στις δύο πλευρές όπου δημιουργούνται τα φορτία). Αν η θερμοκρασία του αυξηθεί και 1 mK, τι τάση θα δημιουργηθεί;

$$p = \frac{\delta P}{\delta T} \Rightarrow \delta P = p \delta T = (380 \times 10^{-6} \text{ C m}^{-2} \text{ K}^{-1})(0.001 \text{ K}) = 3.8 \times 10^{-7} \text{ C m}^{-2}$$

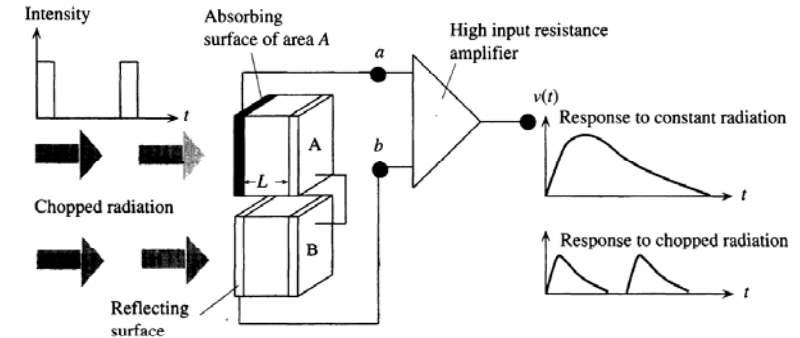
$$\delta P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \delta E \Rightarrow \delta E = \frac{\delta P}{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)} = \frac{3.8 \times 10^{-7} \text{ C m}^{-2}}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1})(290 - 1)} = 148 \text{ V/m}$$

$$\delta V = L \delta E = (148 \text{ V/m})(10^{-4} \text{ m}) = 0.0148 \text{ V}$$

Εύκολα ανιχνεύσιμη τάση. Άρα εύκολα ανιχνεύσιμη $\delta T = 0.001 \text{ }^\circ\text{C}$

Σημαντική εφαρμογή σε φωτοανιχνευτές υπερύθρου
-> θερμική ακτινοβολία -> συναγερμοί

Πυροηλεκτρικοί φωτοανιχνευτές



Καθώς τα πυροηλεκτρικά είναι και πιεζοηλεκτρικά, χρειάζονται δύο στοιχεία για ανίχνευση
-> (A) μετρητής, (B) αντισταθμιστής
-> και τα δύο υφίστανται την ίδια τάση λόγω ηχητικών κυμάτων κτλ -> αλληλοεξουδετέρωση
-> ο (B) καλύπτεται από ανακλαστική επιφάνεια -> μόνο ο (A) λαμβάνει υπέρυθρο σήμα

Καθώς μετά από λίγο χρόνο τα φορτία διαρρέουν ή εξουδετερώνονται
-> εφαρμόζουμε διακοπτόμενη ακτινοβολία

Παράδειγμα 10

Έστω ο πυροηλεκτρικός ανιχνευτής που εξετάσαμε πριν. Έστω ότι το σήμα έχει διάρκεια Δt . Ποια η μεταβολή στην θερμοκρασία;
(το Δt είναι μικρό ώστε να μην χρειάζεται να υπολογίσουμε θερμικές απώλειες)

Η ενέργεια που απορροφάται $\Delta H = IA \Delta t$ I : ένταση ακτινοβολίας
 A : εμβαδό ανιχνευτή

Η μεταβολή στην θερμοκρασία $\Delta T = \frac{\Delta H}{AL\rho c} = \frac{IA \Delta t}{AL\rho c} = \frac{I \Delta t}{L\rho c}$ L : μήκος ανιχνευτή
 ρ : πυκνότητα μάζας
 c : θερμοχωρητικότητα ανα μάζα

Η μεταβολή στην πόλωση $\Delta P = p \Delta T = \frac{p I \Delta t}{L\rho c}$

Η μεταβολή των επιφανειακών φορτίων $\Delta Q = A \Delta P = \frac{A p I \Delta t}{L\rho c}$

Η μεταβολή της τάσης $\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{L}} = \frac{A p I \Delta t}{L \rho c \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{L}} = \frac{p I \Delta t}{\rho c \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \left(\frac{p}{\rho c \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) I \Delta t$

Παράδειγμα 10

Εάν το πυροηλεκτρικό υλικό είναι PZT, και η τάση που μετράμε με $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ είναι $V = 1 \text{ mV}$, ποια είναι η ένταση ακτινοβολίας που προσπίπτει;

Δίνεται: $p = 380 \times 10^{-6} \text{ C m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ $\varepsilon_r = 290$

$c = 380 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ $\rho = 7000 \text{ kg m}^{-3}$

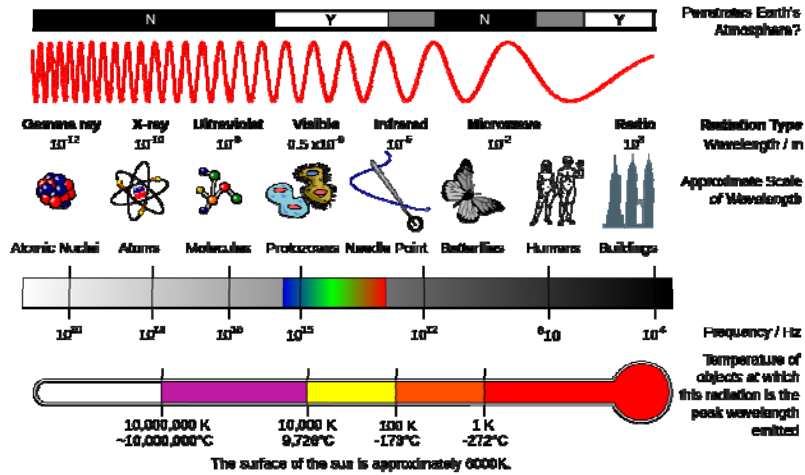
$$\Delta V = \left(\frac{p}{\rho c \varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) I \Delta t \Rightarrow I = \frac{\rho c \varepsilon_0 \varepsilon_r \Delta V}{p \Delta t}$$

$$= \frac{(7000 \text{ kg m}^{-3})(380 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1})(8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1})(290)(10^{-3} \text{ V})}{(380 \times 10^{-6} \text{ C m}^{-2} \text{ K}^{-1})(0.2 \text{ s})} = 0.09 \text{ W m}^{-2}$$

$$\frac{\text{kg m}^{-3} \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1} \text{ F m}^{-1} \text{ V}}{\text{C m}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}} = \frac{\text{m}^{-2} \text{ J F V}}{\text{C s}} = \frac{\text{J}}{\text{s m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Οπτικές ιδιότητες υλικών

Το φως ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα



Οπτικές ιδιότητες υλικών

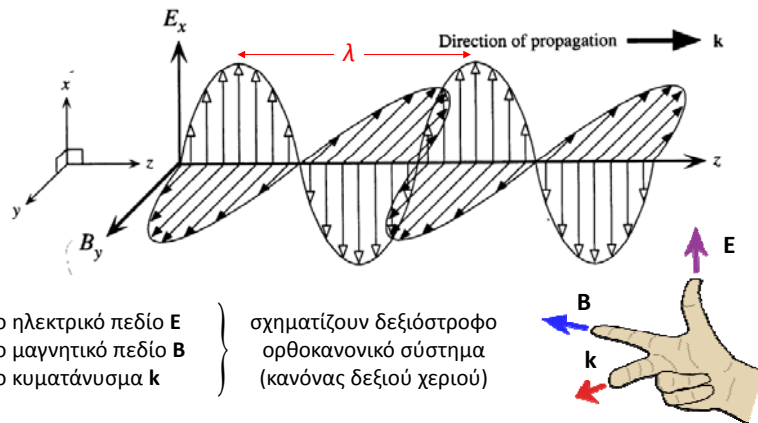
Σε πολλές εφαρμογές η μελέτη του φωτός ως E/M κύμα είναι ικανοποιητική
 -> μεγάλα μήκη κύματος
 -> εφαρμογές που εμπεριέχουν διάθλαση και σκέδαση και συμβολή του φωτός

Στις υπόλοιπες απαιτείται κβαντική προσέγγιση
 -> μικρά μήκη κύματος (π.χ. ακτίνες γ)
 -> εφαρμογές που εμπεριέχουν απορρόφηση και εκπομπή φωτός

Μια από τις βασικές ιδιότητες της ύλης που επηρεάζει την διάδοση του φωτός είναι ο δείκτης διάθλασης
 -> αποτέλεσμα της πόλωσης του υλικού λόγω ηλεκτρικού πεδίου του φωτός
 -> εξαρτάται από του μηχανισμούς πόλωσης
 -> εξαρτάται από την συχνότητα

$$n \equiv n(\omega) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad n \equiv n(\lambda) \quad \text{σχέση διασποράς}$$

Το φως ως E/M κύμα



το ηλεκτρικό πεδίο E
 το μαγνητικό πεδίο B
 το κυματόσσημα k

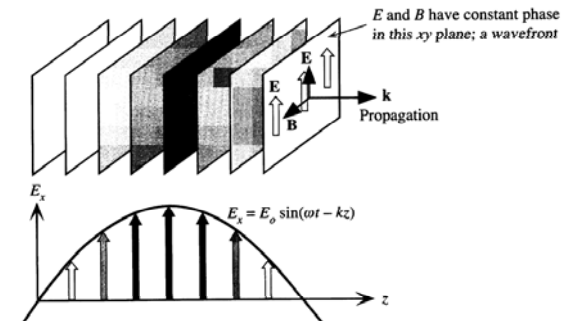
σχηματίζουν δεξιόστροφο
 ορθοκανονικό σύστημα
 (κανόνας δεξιού χεριού)

E/M κύματα

Εξίσωση διάδοσης $E = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0)$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \begin{array}{l} k=|k|: \text{κυματαριθμός} \\ \lambda: \text{χωρική περίοδος} \end{array} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \begin{array}{l} \omega: \text{γωνιακή συχνότητα} \\ T: \text{χρονική περίοδος} \end{array}$$

ϕ_0 αρχική φάση $\phi = kz - \omega t + \phi_0$ φάση κύματος E_0 πλάτος κύματος



Ε/Μ κύματα

Χρησιμοποιούμε ιδιότητες μιγαδικών αριθμών για να τα γράψουμε με την μιγαδική τους μορφή (φανταστική μονάδα $i = \sqrt{-1}$)

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0) = \text{Re}\{E_0 e^{i(kz - \omega t + \phi_0)}\} \quad \text{το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού}$$

πολλές φορές χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $j = -i = -\sqrt{-1}$ για την φανταστική μονάδα

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0) = E_0 \text{Re}\{e^{-j(kz - \omega t + \phi_0)}\}$$

Κάποιες ιδιότητες μιγαδικών αριθμών:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad \text{Re}\{e^{i\phi}\} = \cos \phi \quad \text{Im}\{e^{i\phi}\} = \sin \phi$$

$$e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi \quad \text{Re}\{e^{-i\phi}\} = \cos \phi \quad \text{Im}\{e^{-i\phi}\} = -\sin \phi$$

$$|e^{i\phi}| = \sqrt{(\text{Re}\{e^{i\phi}\})^2 + (\text{Im}\{e^{i\phi}\})^2} = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$

$$e^{i\phi} e^{i\theta} = e^{i(\phi+\theta)} \quad e^{i\phi} / e^{i\theta} = e^{i(\phi-\theta)}$$

$$\text{Re}\{E_0 e^{i(kz - \omega t + \phi_0)}\} = \text{Re}\{E_0 e^{i\phi_0} e^{i(kz - \omega t)}\} = \text{Re}\{E_c e^{i(kz - \omega t)}\} \quad E_c = E_0 e^{i\phi_0}$$

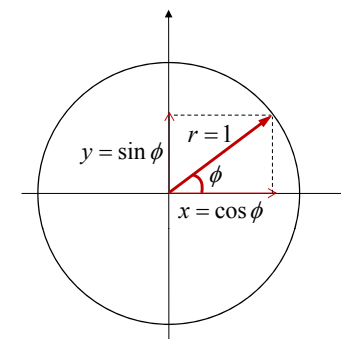
Αναπαράσταση μιγαδικών στο επίπεδο

Έστω ο μοναδιαίος κύκλος

Ως διάνυσμα μπορεί να αναπαρασταθεί

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y = \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$



Ως μιγαδική φάση αναπαρίσταται

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

$$|e^{i\phi}| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$

Το μιγαδικό εκθετικό μπορεί ουσιαστικά να αναπαρασταθεί ως μια στροφή του μοναδιαίου διανύσματος στο επίπεδο χώρο

Στα Ε/Μ αναπαριστά την φάση του κύματος

Ε/Μ κύματα στον τρισδιάστατο χώρο

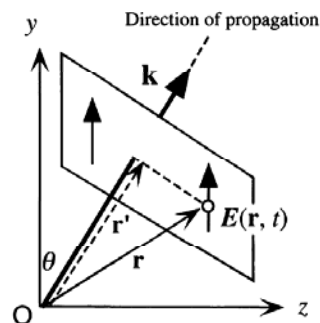
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \omega t + \phi_0)$$

$$\mathbf{k}: \text{κυματόνυσμα} \quad |\mathbf{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}}k_x + \hat{\mathbf{y}}k_y + \hat{\mathbf{z}}k_z \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$



Π.χ. αν η διεύθυνση διάδοσης είναι η z, τότε $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{z}}k_z \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_z z$

Ταχύτητα φάσης

-> η ταχύτητα με την οποία ταξιδεύει το μέτωπο κύματος

-> στο μέτωπο κύματος η φάση παραμένει σταθερή

$$\Rightarrow E_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0) = \text{σταθ} \quad \Rightarrow kz - \omega t + \phi_0 = \text{σταθ}$$

Έστω ότι μετά από χρόνο dt το μέτωπο κύματος ταξίδεψε κατά dz

-> η φάση στο μέτωπο κύματος παραμένει σταθερή

$$\Rightarrow k(z + dz) - \omega(t + dt) = kz - \omega t \quad \Rightarrow kdz - \omega dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} \quad \text{ταχύτητα φάσης}$$

$$\text{Επίσης} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \Rightarrow v_p = f\lambda$$

$$\text{Στο κενό} \quad \Rightarrow v_p = f\lambda_0 = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Δείκτης διάθλασης

Μέσα σε υλικό το E/M κύμα πολώνει τα άτομα και μόρια
 -> η πόλωση αυτή επηρεάζει την διάδοση του κύματος
 -> μοριακά δίπολα και κύμα είναι συζευγμένα

-> επιβράδυνση του πεδίου
 -> σμίκρυνση του μήκους κύματος

Δείκτης διάθλασης $n = \sqrt{\epsilon_r}$

Μήκος κύματος $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$

Ταχύτητα φάσης $v_p = f\lambda = f \frac{\lambda_0}{n} = \frac{c}{n}$

κυματάριθμος $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$

Ισότροπα υλικά
 n είναι ίδιο σε όλες
 τις διευθύνσεις

 Ανισότροπα υλικά
 n είναι διαφορετικό σε
 διαφορετικές διευθύνσεις

Δείκτης διάθλασης

Διηλεκτρική σταθερά και άρα δείκτης διάθλασης εξαρτώνται από την συχνότητα

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \rightarrow n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$$

Table 9.1 Low-frequency (LF) relative permittivity $\epsilon_r(\text{LF})$ and refractive index n

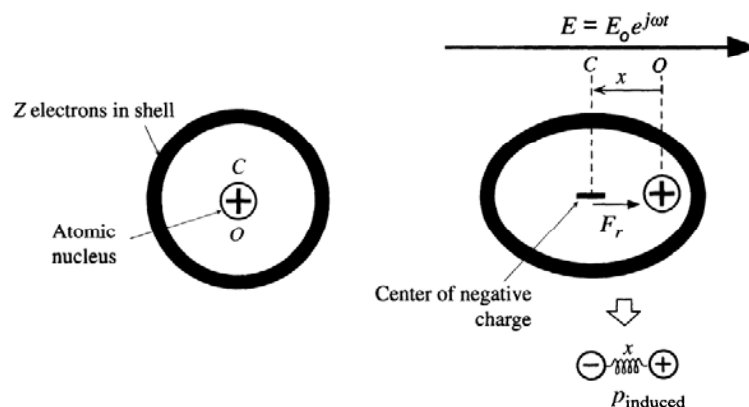
Material	$\epsilon_r(\text{LF})$	$\sqrt{\epsilon_r(\text{LF})}$	$n(\text{optical})$	Comments
Diamond	5.7	2.39	2.41 (at 590 nm)	Electronic bond polarization up to UV light
Si	11.9	3.44	3.45 (at 2.15 μm)	Electronic bond polarization up to optical frequencies
AgCl	11.14	3.33	2.00 (at 1–2 μm)	Ionic polarization contributes to $\epsilon_r(\text{LF})$
SiO ₂	3.84	2.00	1.46 (at 600 nm)	Ionic polarization contributes to $\epsilon_r(\text{LF})$
Water	80	8.9	1.33 (at 600 nm)	Dipolar polarization contributes to $\epsilon_r(\text{LF})$, which is large

Διασπορά

Σχέση δείκτη διάθλασης και μήκους κύματος

Μελετάμε το μοντέλο του ελατηρίου (μοντέλο Lorentz)

-> μας ενδιαφέρει η απόκριση σε συνάρτηση της συχνότητας



Μοντέλο Lorentz

Στην στατική περίπτωση (DC)

$$ZeE = \beta x \quad p_{ind} = (Ze)x = \left(\frac{Z^2 e^2}{\beta} \right) E$$

Εάν απότομα μηδενίσουμε το πεδίο -> ελεύθερη ταλαντευτική κίνηση

$$(Zm_e) \frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{Zm_e} x = 0$$

Εξισώσεις της μορφής $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ έχουν λύση της μορφής $x = x_0 \cos(\omega_0 t)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta}{Zm_e}}$$

ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης:

Εξαρτάται από το είδος του τροχιακού, τον αριθμό των τροχιακών, την σύνδεση των ηλεκτρονίων με τον πυρήνα, κ.α.

Μοντέλο Lorentz

Έστω τώρα ότι τα ηλεκτρόνια ταλαντώνονται από ένα περιοδικό ηλεκτρικό πεδίο
-> το ηλεκτρικό πεδίο από εισερχόμενο φως

$$E = E_0 e^{-i\omega t}$$

-> εξαναγκασμένη ταλάντωση

Εξίσωση κίνησης $(Zm_e) \frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta x - ZeE_0 e^{-i\omega t}$

Για ευκολία υποθέτουμε ότι η μετατόπιση επίσης ακολουθεί την αρμονική ταλάντωση

$$x = x_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 e^{-i\omega t}$$

$$-\omega^2 Zm_e x_0 e^{-i\omega t} = -Zm_e \omega_0^2 x_0 e^{-i\omega t} - ZeE_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2) m_e x_0 e^{-i\omega t} = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t)$$

Σχέση διασποράς

Η επαγόμενη πόλωση

$$p_{ind} = -(Ze)x = \frac{Ze^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E$$

Η πολωσιμότητα

$$p_{ind} = a_e E \Rightarrow a_e = \frac{Ze^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Αυτό είναι απλοϊκό μοντέλο:

-> σε μεγάλες ταλαντώσεις δεν ισχύει η προσέγγιση του ελατηρίου

-> γενικά υπάρχουν και απώλειες (τριβές) που δεν επιτρέπουν τον απειρισμό στη $\omega = \omega_0$

Διηλεκτρική συνάρτηση και δείκτης διάθλασης

-> εξαρτώμενοι από συχνότητα -> σχέση διασποράς

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} a_e \Rightarrow \epsilon_r = n^2 = 1 + \left(\frac{NZe^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Μοντέλα για τον δείκτη διάθλασης

$$n^2 = 1 + \left(\frac{NZe^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Η σχέση διασποράς συχνά γράφεται συναρτήσει του μήκους κύματος $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{(2\pi c)^2} \frac{\lambda_0^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \Rightarrow n^2 = 1 + \left(\frac{NZe^2}{\epsilon_0 m_e} \right) \left(\frac{\lambda_0}{2\pi c} \right)^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

Για πολλούς συντονισμούς (διαφορετικά άτομα, δεσμοί, κτλ) κάνουμε παραμετροποίηση

Μοντέλο Sellmeier

$$n^2 = 1 + \frac{A_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{A_2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{A_3 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \dots$$

Όλα τα μήκη κύματος στις παραδίπλα εκφράσεις αναφέρονται στο μήκος κύματος στο κενό. Το λ_0 στο μήκος κύματος συντονισμού που αντιστοιχεί στην ω_0 , το λ_1 στην ω_1 κοκ

Μοντέλο Cauchy

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

Δείκτης διάθλασης για ενδεικτικά υλικά

Table 9.2 Sellmeier and Cauchy coefficients

	Sellmeier					
	A ₁	A ₂	A ₃	λ ₁ (μm)	λ ₂ (μm)	λ ₃ (μm)
SiO ₂ (fused silica)	0.696749	0.408218	0.890815	0.0690660	0.115662	9.900559
86.5% SiO ₂ -13.5% GeO ₂	0.711040	0.451885	0.704048	0.0642700	0.129408	9.425478
GeO ₂	0.80686642	0.71815848	0.85416831	0.068972606	0.15396605	11.841931
Sapphire	1.023798	1.058264	5.280792	0.0614482	0.110700	17.92656
Diamond	0.3306	4.3356	—	0.1750	0.1060	—

	Cauchy				
	Range of hν (eV)	n ₋₂ (eV ²)	n ₀	n ₂ (eV ⁻²)	n ₋₄ (eV ⁻⁴)
Diamond	0.05-5.47	-1.07 × 10 ⁻⁵	2.378	8.01 × 10 ⁻³	1.04 × 10 ⁻⁴
Silicon	0.002-1.08	-2.04 × 10 ⁻⁸	3.4189	8.15 × 10 ⁻²	1.25 × 10 ⁻²
Germanium	0.002-0.75	-1.0 × 10 ⁻⁸	4.003	2.2 × 10 ⁻¹	1.4 × 10 ⁻¹

Κυματοπακέτα-ταχύτητα ομάδας

Όταν έχουμε ένα μόνο μήκος κύματος -> άπειρος κυματοσυρμός

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad \text{με ταχύτητα φάσης } v_p = \omega / k$$

Κυματοπακέτα φτιάχνονται με την πρόσθεση κυμάτων με ελαφρά διαφορετικές συχνότητες
-> παράδειγμα με δύο κύματα -> διακρότημα

$$E_1 = E_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) \quad E = E_1 + E_2 = E_0 \{ \cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t) \}$$

$$E_2 = E_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t)$$

Χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{b-a}{2}\right)$

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2} z - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} z - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

έστω ότι $\left. \begin{array}{l} \omega_1 \approx \omega_2 \\ k_1 \approx k_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega_1 = \omega - \delta\omega \quad \omega_2 = \omega + \delta\omega \\ k_1 = k - \delta k \quad k_2 = k + \delta k \end{array}$ $E = 2E_0 \cos(kz - \omega t) \cos(\delta kz - \delta\omega t)$

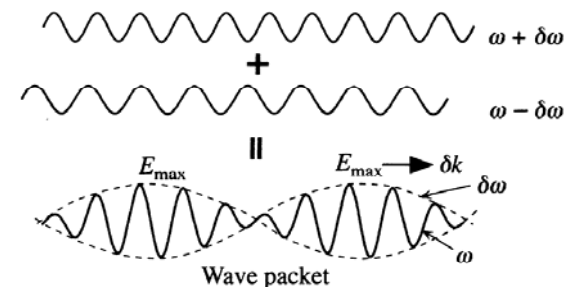
Κυματοπακέτα-ταχύτητα ομάδας

$$E = 2E_0 \cos(kz - \omega t) \cos(\delta kz - \delta\omega t)$$

Αποτελείται από το γινόμενο δύο κυμάτων

-> ένα μεγάλης συχνότητας ω_0 , ίση με τον μέσο όρο των δύο συχνοτήτων

-> ένα μικρής συχνότητας $\delta\omega$ ίση με την διαφορά των δύο συχνοτήτων



Η ταχύτητα μεταβολής της φάσης μέσα στην περιβάλλουσα $v_p = \omega / k$

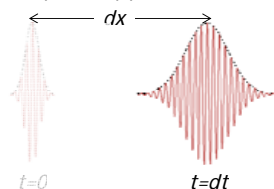
Η ταχύτητα διάδοσης της περιβάλλουσας ονομάζεται ταχύτητα ομάδας $v_g = \delta\omega / \delta k$

Ταχύτητα ομάδας

Η ταχύτητα που διαδίδεται ένας παλμός είναι ουσιαστικά η ταχύτητα της περιβάλλουσας

-> λόγω διασποράς (μεταβολή δείκτη διάθλασης με λ)

-> ταχύτητα μεταφοράς ενέργειας, ταχύτητα μεταφοράς πληροφορίας, κ.τ.λ



Ταχύτητα ομάδας

$$v_g \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

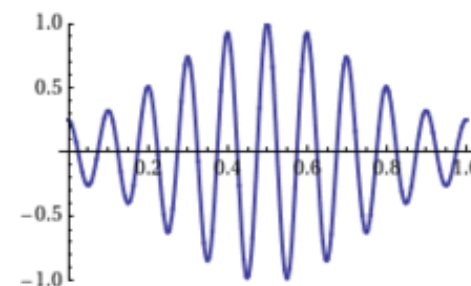
$$k = n \frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \Rightarrow v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

ως προς το μήκος κύματος

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{d\lambda_0}{d\omega} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{d\lambda_0}{d\omega} = -\frac{\lambda_0^2}{2\pi c} = -\frac{\lambda_0}{\omega} \Rightarrow v_g = \frac{c}{n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}}$$

Ταχύτητα φάσης και ταχύτητα ομάδα

Σε κάποια υλικά η ταχύτητα φάσης και ταχύτητα ομάδας μπορούν να έχουν και αντίθετη φορά



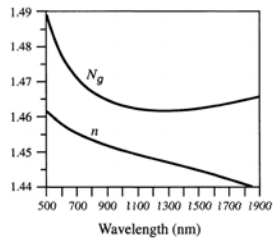
Δείκτης ομάδας

Ο δείκτης διάθλασης συνδέεται με την ταχύτητα φάσης

$$k = n \frac{\omega}{c} \quad v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow n = \frac{c}{v_p}$$

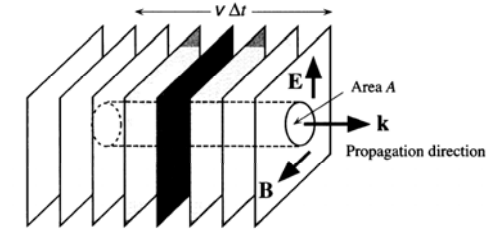
μπορούμε να ορίζουμε τον δείκτη διάθλασης ομάδας

$$N_g = \frac{c}{v_g} \quad \Rightarrow N_g = n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}$$



Δείκτης και δείκτης ομάδας για καθαρό πυριτικό ύαλο (SiO_2). Στα 1300 nm ο δείκτης ομάδας κάνει ελάχιστο, οπότε η μεταβολή του με το μήκος κύματος γίνεται μηδέν (τοπικό ακρότατο). Σε αυτή την συχνότητα κυματοπακέτα διαδίδονται χωρίς διασπορά, δηλαδή χωρίς παραμόρφωση της κυματομορφής
-> κατάλληλο μήκος κύματος για οπτικές ίνες

Μαγνητικό πεδίο



Από τον νόμο του Faraday προκύπτει η σχέση που συνδέει το μαγνητικό με το ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$$

Σε ένα επίπεδο κύμα είναι όλα κάθετα μεταξύ τους

$$B = \frac{k}{\omega} E = \frac{1}{v_p} E = \frac{n}{c} E$$

Πυκνότητα ενέργειας επίπεδου κύματος

Η στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας ενός κύματος

$$\text{του ηλεκτρικού πεδίου} \quad u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

$$\text{του μαγνητικού πεδίου} \quad u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Λόγω συμμετρίας αυτά τα δύο είναι ίσα

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

Χρησιμοποιούμε την σχέση E-B που γράψαμε πριν $B = \frac{n}{c} E$

$$u_E = u_B \Rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \Rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} E^2 \Rightarrow \epsilon_r = \frac{\sqrt{n^2}}{c} = 1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

Ακτινοβολήση επίπεδου κύματος

Ή αλλιώς ένταση ακτινοβολίας

Η ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνο μέσα από μοναδιαία επιφάνεια

ροή ενέργειας = πυκνότητα ενέργειας x ταχύτητα διάδοσης

$$S = v_p \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

Με το μαγνητικό πεδίο γράφεται

$$B = \frac{n}{c} E \Rightarrow E = v_p B \Rightarrow S = v_p^2 \epsilon_0 \epsilon_r E B$$

Στη γενική περίπτωση κυμάτων στον τρισδιάστατο χώρο

$$\mathbf{S} = v_p^2 \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad \text{το } \mathbf{S} \text{ ονομάζεται δiάνυσμα Poynting}$$

Μέση ακτινοβοληση

Συνήθως μας ενδιαφέρει η μέση ακτινοβοληση και όχι η στιγμιαία

$$E = E_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$$

Η μέση ακτινοβοληση /

$$I = \frac{1}{2} \frac{c}{n} \epsilon_0 n^2 E_0^2 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n E_0^2$$

$$I = (1.33 \times 10^{-3}) n E_0^2$$

Ανάκλαση από επιφάνεια

Το μέτωπο κύματος έχει την ίδια φάση

Τα κύματα στα δύο υλικά έχουν διαφορετικές ταχύτητες

Ο χρόνος για να τρέξει το κύμα την απόσταση BB' στο υλικό 1 = με τον χρόνο να τρέξει την απόσταση AA' στο υλικό 2

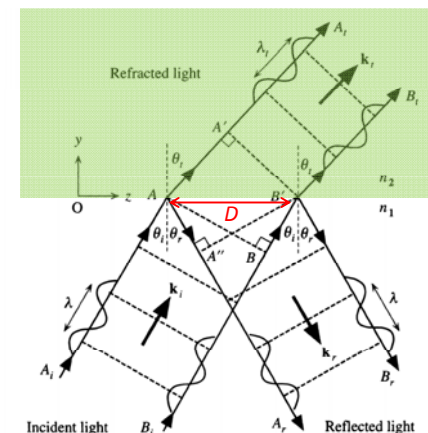
$$BB' = D \sin \theta_i$$

$$AA' = D \sin \theta_t$$

Οι χρόνοι διάδοσης

$$t_{BB'} = \frac{D \sin \theta_i}{v_1} = \frac{D n_1 \sin \theta_i}{c}$$

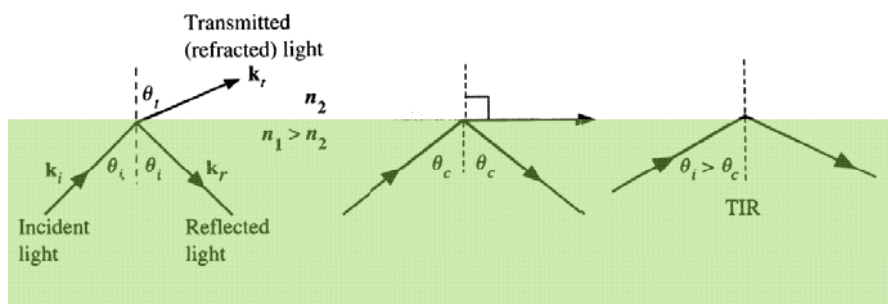
$$t_{AA'} = \frac{D \sin \theta_t}{v_2} = \frac{D n_2 \sin \theta_t}{c}$$



$$t_{AA'} = t_{BB'} \Rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Νόμος του Snell

Εσωτερική ολική ανάκλαση

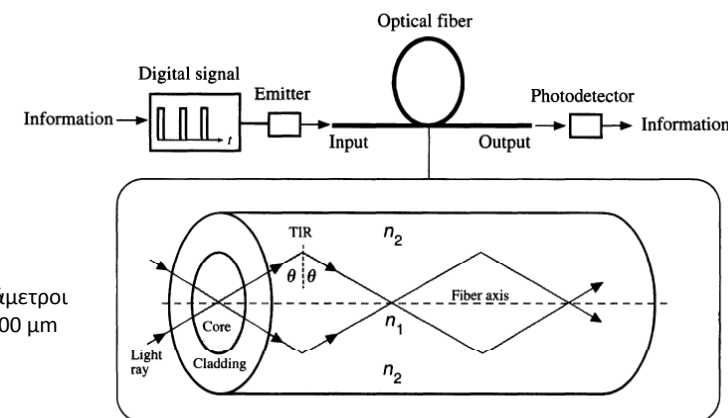


$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Για $\theta_i = \pi/2$ $\sin \theta_{i,c} = \frac{n_2}{n_1}$

Για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες από θ_c έχουμε ολική ανάκλαση

Οπτικές ίνες

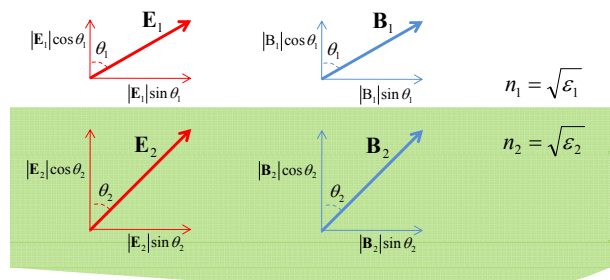


Τυπικές διαμέτροι πυρήνα $\sim 100 \mu\text{m}$

Για παράδειγμα, τυπικές τιμές $n_{\text{core}} = 1.445$ $n_{\text{cladd}} = 1.440$

$$\theta_{i,c} = \sin^{-1} \frac{n_{\text{cladd}}}{n_{\text{core}}} = 81.8^\circ$$

Συνοριακές συνθήκες



Συνεχείς είναι:

- η παράλληλη συνιστώσες του E $|\mathbf{E}_1| \sin \theta_1 = |\mathbf{E}_2| \sin \theta_2$
- η κάθετη συνιστώσα του $\epsilon_r E$ επί την διηλεκτρική $\epsilon_1 |\mathbf{E}_1| \cos \theta_1 = \epsilon_2 |\mathbf{E}_2| \cos \theta_2$
- η παράλληλη συνιστώσα του B/μ_0 $|\mathbf{B}_1| \sin \theta_1 = |\mathbf{B}_2| \sin \theta_2$
- η κάθετη συνιστώσα του B $|\mathbf{B}_1| \cos \theta_1 = |\mathbf{B}_2| \cos \theta_2$

Ανάκλαση και διέλευση από διεπιφάνεια

Εισερχόμενο κύμα

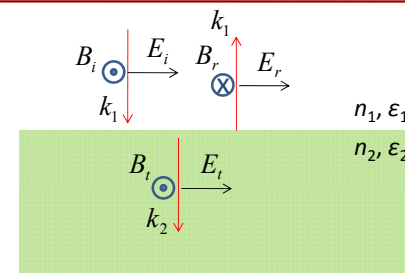
$$E_i e^{i(k_1 z - \omega t)}$$

Ανακλώμενο κύμα

$$E_r e^{i(-k_1 z - \omega t)}$$

Διαθλώμενο κύμα

$$E_t e^{i(k_2 z - \omega t)}$$



Συνοριακές συνθήκες για κάθετη πρόσπτωσηση

Συνέχεια ηλεκτρικού πεδίου

$$E_i + E_r = E_t$$

Συνέχεια μαγνητικού πεδίου

$$B_i - B_r = B_t$$

όμως $B = \frac{n}{c} E \Rightarrow n_1(E_i - E_r) = n_2 E_t$

$$\Rightarrow n_1(E_i - E_r) = n_2(E_i + E_r)$$

$$\Rightarrow E_i(n_1 - n_2) = E_r(n_2 + n_1)$$

Πλάτος ανάκλασης για κάθετη πρόσπτωσηση

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}$$

Ανάκλαση και διέλευση από διεπιφάνεια

Πλάτος ανάκλασης για κάθετη πρόσπτωσηση $r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}$

Πλάτος διέλευσης για κάθετη πρόσπτωσηση $t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$

Συντελεστής ανάκλασης και διέλευσης

-> τα αντίστοιχα ποσοστά των ροών ενέργειας

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n E_0^2$$

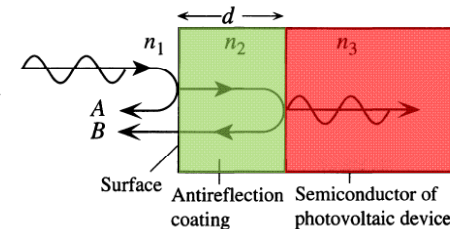
Συντελεστής ανάκλασης $R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = |r|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$

Συντελεστής διέλευσης $T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2 |E_t|^2}{n_1 |E_i|^2} = \frac{n_2}{n_1} |t|^2 = \frac{4n_1 n_2}{|n_1 + n_2|^2}$

Εύκολο να δειχτεί η αρχή διατήρησης ενέργειας $T + R = 1$

Εφαρμογές

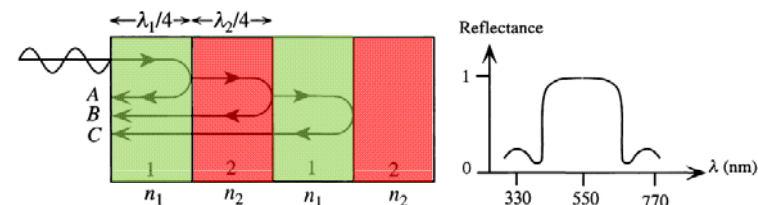
Αντιανακλαστικές επιστρώσεις σε ηλιακά κύτταρα, φακούς, κτλ -> για συγκεκριμένο μήκος κύματος μπορεί να μηδενιστεί η ανάκλαση



Διηλεκτρικοί καθρέπτες

-> προσθετικές ανακλάσεις από όλες τις επιφάνειες

-> σε εύρος συχνοτήτων η ανάκλαση είναι ολική



Μιγαδικός δείκτης διάθλασης

Υλικά με απορρόφηση εμφανίζουν μιγαδική διηλεκτρική σταθερά και άρα μιγαδικό δείκτη διάθλασης
 -> φανταστικό μέρος -> απορρόφηση

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_r' + i\epsilon_r'' \\ n &= n' + in'' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \epsilon_r' &= n'^2 - n''^2 \\ \epsilon_r'' &= 2n'n'' \end{aligned}$$

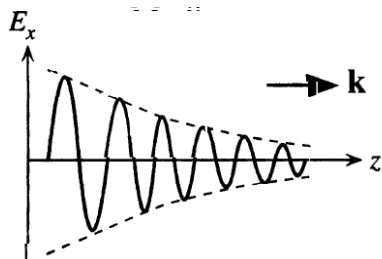
Μιγαδικό θα είναι και ο κυματάρημος $k = k' + ik''$

$$E = E_0 e^{ikz} = E_0 e^{i(k'+ik'')z} = E_0 e^{ik'z - k''z} = E_0 e^{ik'z} e^{-k''z}$$

Η ένταση ακτινοβολίας $I = I_0 e^{-2k''z} = I_0 e^{-\alpha z}$

συντελεστής απορρόφησης

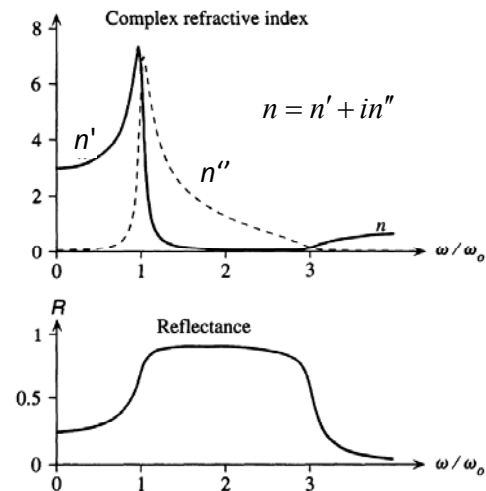
$$\alpha = 2k'' = 2 \frac{2\pi}{\lambda_0} n'' = \frac{4\pi n''}{\lambda_0}$$



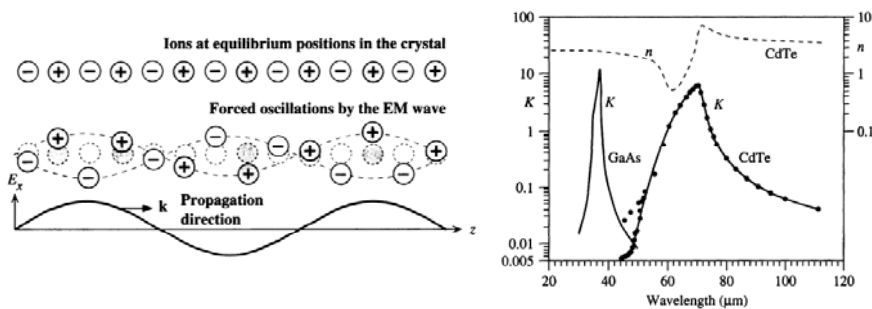
Μιγαδικός δείκτης διάθλασης

Συντελεστής ανάκλασης:
 από αέρα $n_1=1$
 σε υλικό $n_2=n'+in''$

$$R = \frac{|1 - n' - in''|^2}{|1 + n' + in''|^2} = \frac{(1 - n')^2 + n''^2}{(1 + n')^2 + n''^2}$$



Απορρόφηση πλέγματος

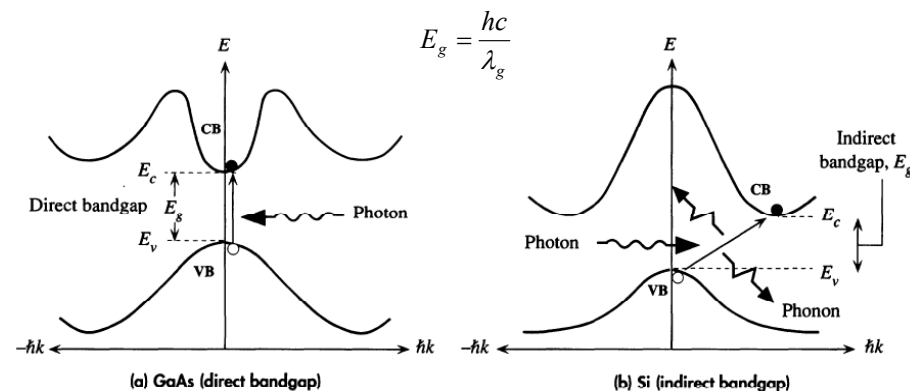


Διαζωνική απορρόφηση σε ημιαγωγούς

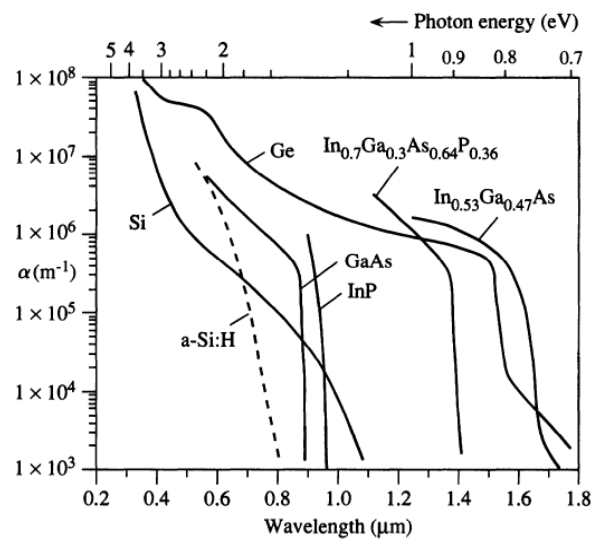
Μεταβάσεις στο ενεργειακό χάσμα

-> διατήρηση ενέργειας $\hbar\omega = E_g$

-> διατήρηση ορμής -> μόνο σε άμεσο χάσμα (το φωτόνιο έχει μηδενική ορμή)



Απορρόφηση ημιαγωγών



Απορρόφηση ημιαγωγών

Semiconductor	E_g (eV)	λ_g (μm)	Type
InP	1.35	0.91	D
GaAs _{0.88} Sb _{0.12}	1.15	1.08	D
Si	1.12	1.11	I
In _{0.7} Ga _{0.3} As _{0.64} P _{0.36}	0.89	1.4	D
In _{0.53} Ga _{0.47} As	0.75	1.65	D
Ge	0.66	1.87	I
InAs	0.35	3.5	D
InSb	0.18	7	D