



Κβαντική Θεωρία της Ύλης

Διδάσκων: Λευτέρης Λοιδωρίκης
Π11, 7146, elidorik@cc.uoi.gr
<http://cmsl.materials.uoi.gr/lidorikis>

Κβαντική θεωρία του φωτός

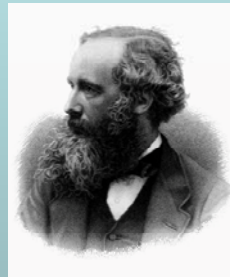
Η φυσική στις αρχές του 20^{ου} αιώνα



Isaac Newton

Βαρύτητα

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = ma$$



James Clerk Maxwell

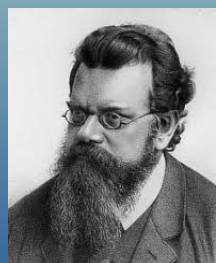
ηλεκτρομαγνητισμός

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} ds = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \mathbf{B} ds = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$



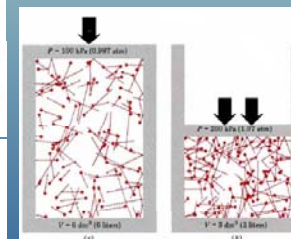
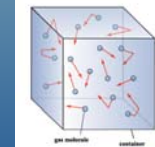
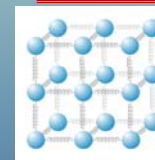
Ludwig Boltzmann

στατιστική μηχανική

$$S = k \log W$$

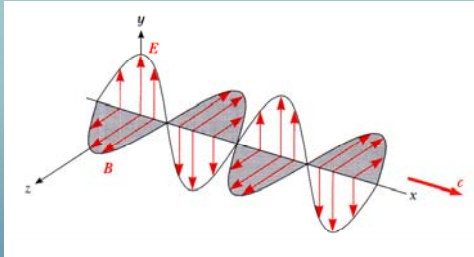
$$P(E) \propto e^{-E/KT}$$

Η φυσική στις αρχές του 20^{ου} αιώνα



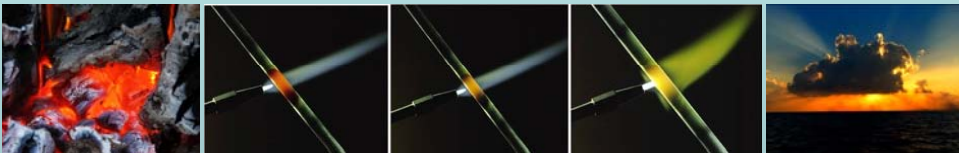
Προβλέψεις της θεωρίας Maxwell

- Το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα
 - διαδίδεται με ταχύτητα $c = 3 \times 10^8$ m/s
 - ανακλάται, διαθλάται, πολώνεται, συμβάλει
 - μήκος κύματος και συχνότητα συνδέονται

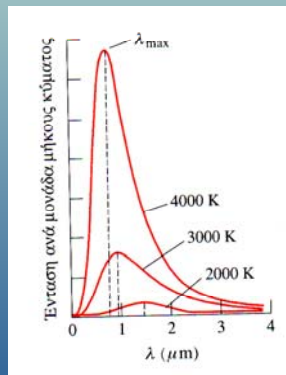
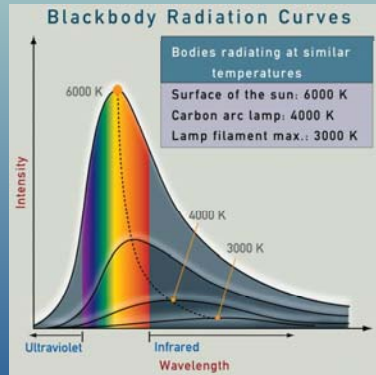


- Κάθε μεταβαλλόμενο ρεύμα (π.χ. σε σύρμα) επάγει ηλεκτρομαγνητικά κύματα
 - διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα
 - ανακλούνται, διαθλούνται πολώνονται, συμβάλουν
 - συχνότητα ίση με την συχνότητα ταλάντωσης του ρεύματος

Θερμική ακτινοβολία

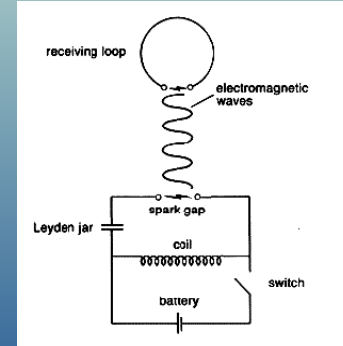


- Κάθε σώμα εκπέμπει μόνο ανάλογα της θερμοκρασίας του
- Μπορούμε με θερμοδυναμικούς συλλογισμούς να βρούμε την κατανομή συχνοτήτων ενός θερμού σώματος;

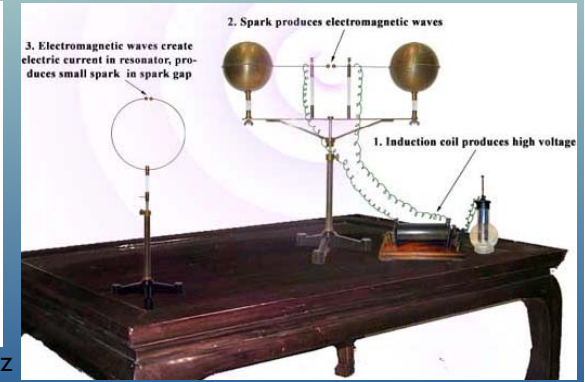


Τα πειράματα του Hertz

- Δημιούργησε ηλεκτρομαγνητικά κύματα απο κεραία με εναλλασσόμενο ρεύμα $f = 500$ MHz
 - τα επαγόμενα κύματα διαδίδονταν, ανακλώνταν, διαθλώνταν, πολώνονταν και συμβάλανε
 - μέτρησε μήκος κύματος $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}} = 0.6 \text{ m}$

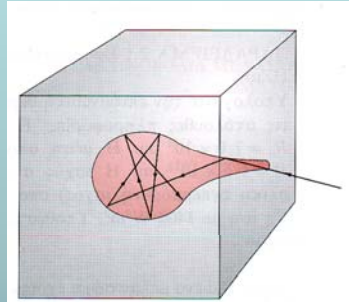


Σχεδιάγραμμα διάταξης του Hertz



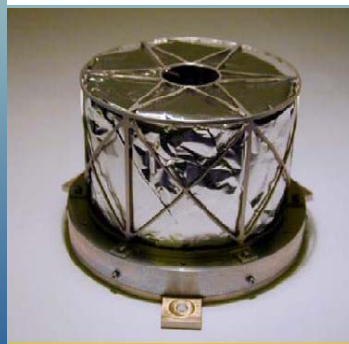
Ακτινοβολία μέλανος σώματος

- Κάθε τμήμα του τοιχώματος:
 - απορροφάει φως
 - εκπέμπει θερμικό φως
- Σε θερμοδυναμική ισορροπία:
 - ρυθμός εκπομπής = ρυθμός απορρόφησης
 - φασματική πυκνότητα φωτεινής ενέργειας
- Μέλαν σώμα:
 - απορροφάει πλήρως την προσπίπτουσα ακτινοβολία σε όλες τις συχνότητες
 - ρυθμός εκπομπής απο το άνοιγμα



$$u(f, T)$$

$$J(f, T) = u(f, T)c/4$$





Σχέση πυκνότητας και ροής ενέργειας

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- ροή ενέργειας = πυκνότητα ενέργειας × μέση κατευθυνόμενη ταχύτητα

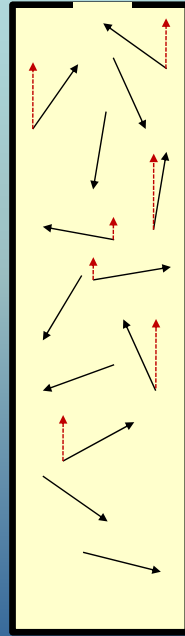
$$J(f, T) = u(f, T) \cdot \bar{v}$$

- μέτρο ταχύτητας = c
- προβολή ταχύτητας = $c \cdot \cos \theta$

- μέση κατευθυνόμενη ταχύτητα

$$\bar{v} = c \frac{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\phi}{2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta d\phi} = c \frac{2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \cdot d(\cos \theta)}{4\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cdot d\theta} = c \frac{\pi}{4\pi}$$

$$\bar{v} = \frac{c}{4} \Rightarrow J(f, T) = u(f, T)c/4$$



Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Τι ήταν γνωστό;
 - Νόμος Stefan-Boltzmann

$$E = \int_0^{\infty} J(f, T) df = \sigma T^4$$

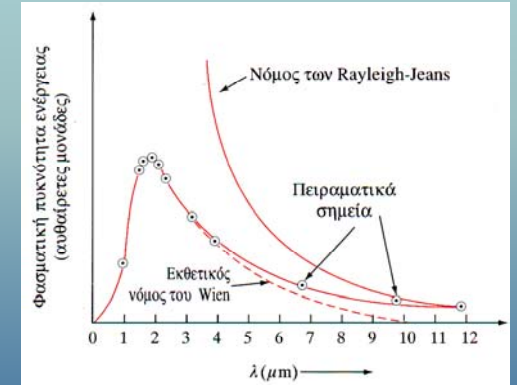
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

- Εκθετικός νόμος του Wien
 - Νόμος μετατόπισης Wien

$$\lambda_{\text{max}} T = 2.989 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

- Νόμος Rayleigh-Jeans

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$



Νόμος Rayleigh-Jeans

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- πυκνότητα ενέργειας = αριθμός στάσιμων κυμάτων × μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα

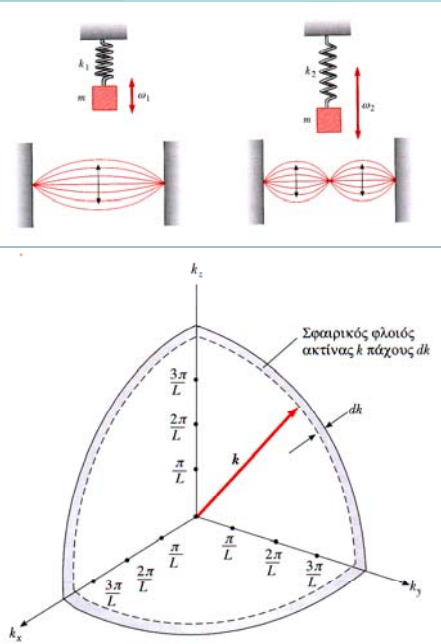
$$u(f, T) = N(f) \bar{E}$$

- αριθμός στάσιμων κυμάτων

$$N(k) dk = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2}{(\pi/L)^3} dk \Rightarrow$$

$$\frac{N(k)}{V} dk = \frac{k^2}{\pi^2} dk \Rightarrow$$

$$N(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3}$$



Νόμος Rayleigh-Jeans

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Μέση ενέργεια ανά ταλαντωτή

$$\bar{E} = \frac{\sum E \cdot P(E)}{\sum P(E)}$$
- Κλασική θεώρηση: η ενέργεια κάθε ταλαντωτή μπορεί να είναι οποιαδήποτε

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} = kT$$

- Τελική μορφή

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$



Τύπος του Planck

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Μέση ενέργεια ανά ταλαντωτή

$$\bar{E} = \frac{\sum E \cdot P(E)}{\sum P(E)}$$

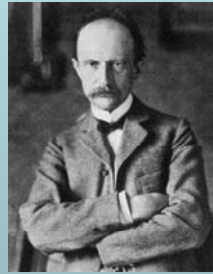
- Κβαντική θεώρηση:

η ενέργεια κάθε ταλαντωτή το ακέραιο άθροισμα φωτονίων

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nhf \cdot e^{-nhf/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nhf/kT}} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

- Τελική μορφή

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$



ενέργεια φωτονίου

$$E_{ph} = h \cdot f$$

σταθερά του Planck

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$= 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$



Εκφράσεις μέσης ενέργειας

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Μέση ενέργεια ανά ταλαντωτή

$$\bar{E} = \frac{\sum E \cdot P(E)}{\sum P(E)}$$

- Ολοκλήρωση της κλασικής μορφής

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} = kT$$

$$\frac{E}{kT} = x \quad E = x \cdot kT \quad dE = dx \cdot kT$$

$$\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE = kT \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -kT(e^{-\infty} - e^{-0}) = kT$$

$$\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE = -\frac{\partial}{\partial(1/kT)} \int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE = -\frac{\partial}{\partial(1/kT)} (kT) = k^2 T^2$$

- Άθροιση της κβαντικής μορφής

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nhf \cdot e^{-nhf/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nhf/kT}} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

$$x = e^{-hf/kT} \quad x \leq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nhf/kT} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-e^{-hf/kT}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nhf \cdot e^{-nhf/kT} = -\frac{\partial}{\partial(1/kT)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nhf/kT} = -\frac{\partial}{\partial(1/kT)} \left(\frac{1}{1-e^{-hf/kT}} \right) = \frac{hfe^{-hf/kT}}{(1-e^{-hf/kT})^2}$$



Ανάλυση τύπου Planck

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Σε πολύ υψηλές συχνότητες

$$e^{hf/kT} \gg 1$$

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \rightarrow \frac{8\pi hf^3}{c^3} e^{-hf/kT}$$

εκθετικός νόμος του Wien

- Σε πολύ χαμηλές συχνότητες

$$e^{hf/kT} \rightarrow 1 + \frac{hf}{kT} + \dots$$

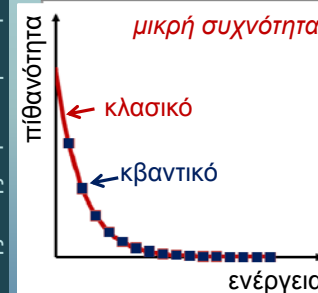
$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \rightarrow \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

νόμος Rayleigh-Jeans

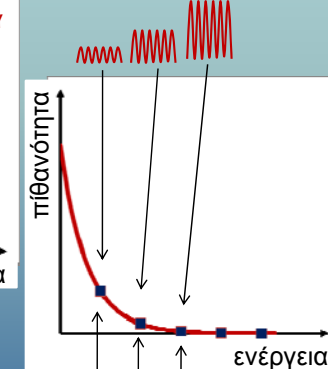


Κβάντωση φωτός

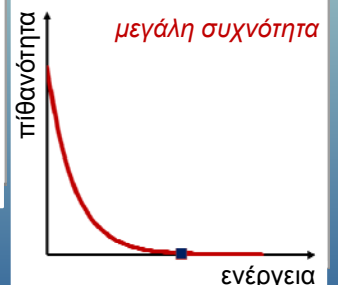
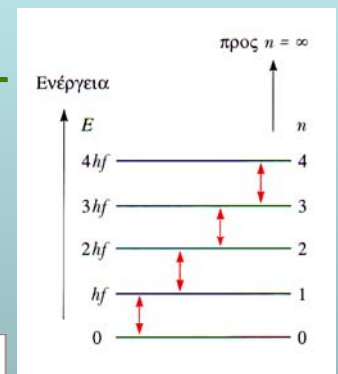
Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός



κλασική εικόνα



$$E = nhf$$

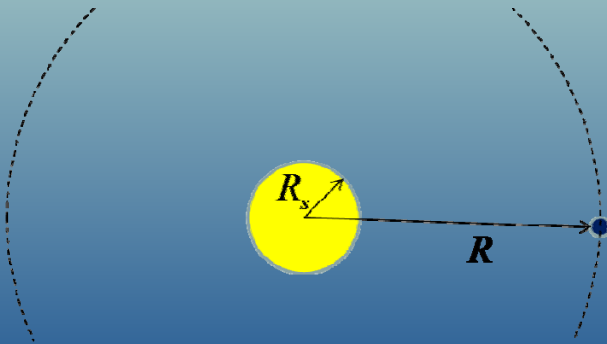




Παράδειγμα 2.1

- Η ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας που φτάνει στην γη απο τον ήλιο είναι 1400 W/m^2 . Ποιά η επιφανειακή θερμοκρασία του ήλιου; (θεωρούμε τον ήλιο μέλαν σώμα)

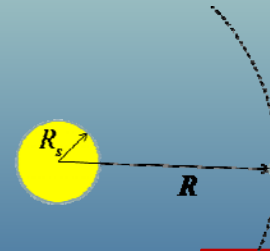
Δίνονται: ακτίνα ήλιου $R_s = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$
 απόσταση γης-ήλιου $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$
 σταθερά Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$



Παράδειγμα 2.1

- Η ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας που φτάνει στην γη απο τον ήλιο είναι 1400 W/m^2 . Ποιά η επιφανειακή θερμοκρασία του ήλιου; (θεωρούμε τον ήλιο μέλαν σώμα)

Δίνονται: ακτίνα ήλιου $R_s = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$
 απόσταση γης-ήλιου $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$
 σταθερά Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$



θερμική εκπομπή: $E(R_s) = \sigma T^4$

συνολική ισχύς: $4\pi R_s^2 \cdot \sigma T^4$

ισχύς στη γή: $\frac{\text{συνολική ισχύς}}{4\pi R^2} = \sigma T^4 \frac{4\pi R_s^2}{4\pi R^2}$

επιφανειακή θερμοκρασία ήλιου: $T = \sqrt[4]{\frac{1400 \text{ W/m}^2}{\sigma} \frac{R_s^2}{R^2}} = 5800 \text{ K}$



Παράδειγμα 2.3

- Έστω δύο ταλαντωτές που εκπέμπουν στα 540 nm (πράσινο) και στα 700 nm (ερυθρό). Ποιά η ελάχιστη μεταβολή ενέργειας για τον καθένα;

$$\Delta E_{green} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{540 \times 10^{-9} \text{ m}} = 3.68 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Delta E_{red} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{700 \times 10^{-9} \text{ m}} = 2.84 \times 10^{-19} \text{ J}$$

πιό σωστές μονάδες ενέργειας για την περίπτωση

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

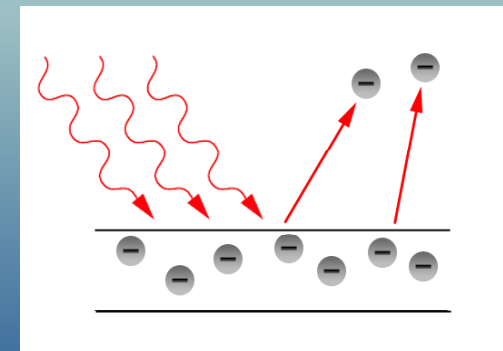
$$\Delta E_{green} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{540 \text{ nm}} = 2.3 \text{ eV}$$

$$\Delta E_{red} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{700 \text{ nm}} = 1.77 \text{ eV}$$



Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

- Μεταλλικές επιφάνειες ακτινοβολούμενες από υπεριώδη ακτινοβολία, εκπέμπουν ηλεκτρόνια (Hertz, Thomson)
- Η μέγιστη κινητική ενέργεια των εξαγόμενων ηλεκτρονίων δεν εξαρτάται απο την ένταση του φωτός, αλλά μόνο από την συχνότητα (Lenard)

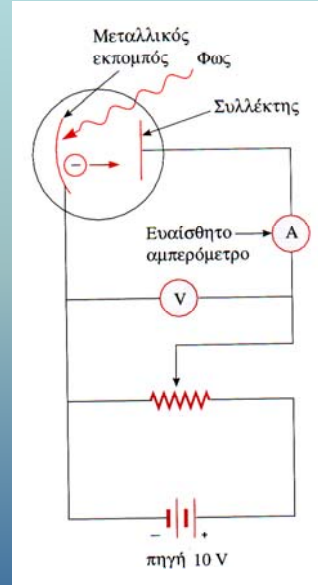
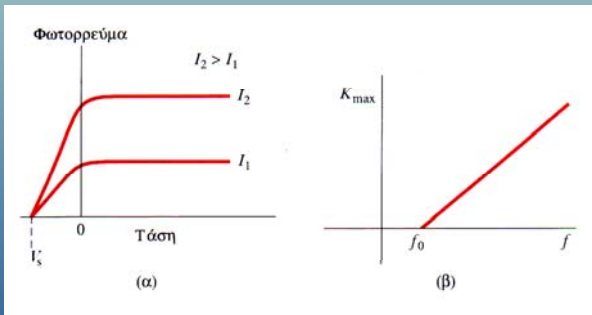


Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

- Μέγιστη ταχύτητα εξαγόμενου ηλεκτρονίου, εξαρτώμενη μόνο από την συχνότητα

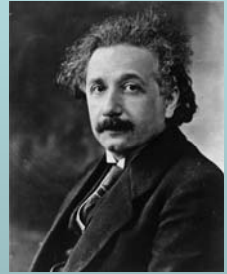
$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = eV_s$$

- Συχνότητα κατωφλίου f_0 χαρακτηριστική κάθε μετάλλου \rightarrow έργο εξόδου $\phi = hf_0$



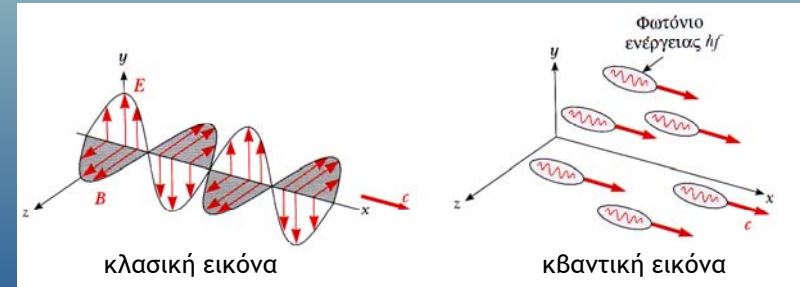
Εξήγηση φωτοηλεκτρικού

- Einstein:**
 - η αλληλεπίδραση φωτός-ύλης είναι στιγμιαία
 - κβάντα ενέργειας $hf \rightarrow$ φωτόνια
 - ένα φωτόνιο δίνει όλη την ενέργειά του μεμιάς
 - μέρος της ενέργειας για εξαγωγή ηλεκτρονίου
 - το υπόλοιπο σε κινητική ενέργεια ηλεκτρονίου



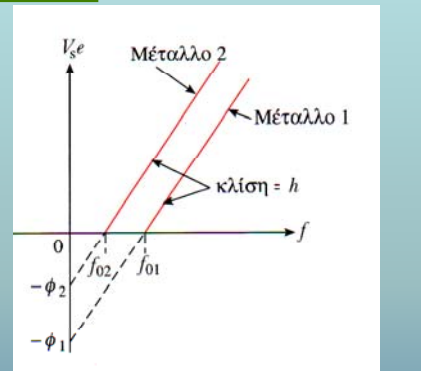
$$K_{\max} = hf - \phi$$

ϕ : έργο εξόδου, $\phi = hf_0$



Εξήγηση φωτοηλεκτρικού

- Αύξηση έντασης ακτινοβολίας \rightarrow περισσότερα φωτοηλεκτρόνια
 - ίδια όμως κινητικής ενέργειας
- Αύξηση συχνότητας ακτινοβολίας \rightarrow πιο γρήγορα φωτοηλεκτρόνια
 - ίδια όμως σε αριθμό



- Πρόβλεψη: μετρώντας το V_s σαν συνάρτηση της συχνότητας

- ίδια κλίση ευθείας για διαφορετικά μέταλλα
- η κλίση είναι ίση με h
- ο Millikan μέτρησε έτσι το h με ακρίβεια 0.5%

Έργο εξαγωγής για ορισμένα μέταλλα

Μέταλλο	Έργο εξαγωγής, ϕ , σε eV
Na	2,28
Al	4,08
Cu	4,70
Zn	4,31
Ag	4,73
Pt	6,35
Pb	4,14
Fe	4,50

Παράδειγμα 2.4

- Φωτοηλεκτρόνια από ψευδάργυρο που εξαγονται ύστερα από ακτινοβολία με υπεριώδης φως, ακινητοποιούνται από μια τάση 4.3 V. Βρείτε τα μεγέθη K_{\max} και v_{\max} για αυτά τα ηλεκτρόνια.

$$K_{\max} = eV_s = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(4.3 \text{ V}) = 6.88 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2eV_s}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(6.88 \times 10^{-19} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.23 \times 10^6 \text{ m/s}$$

- Τι συχνότητα UV χρησιμοποιήθηκε; ($\phi_{\text{Zn}} = 4.31 \text{ eV}$)

$$hf = K_{\max} + \phi = 4.3 \text{ eV} + 4.31 \text{ eV} = 8.61 \text{ eV}$$

$$f = \frac{K_{\max} + \phi}{h} = \frac{8.61 \text{ eV}}{4.41 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 2.08 \times 10^{15} \text{ Hz}$$



Παράδειγμα 2.5

- Φως ολικής έντασης $1\mu\text{W}/\text{cm}^2$ προσπίπτει σε καθαρή επιφάνεια Fe.
 - το δείγμα ανακλά το 96% του φωτός
 - απο αυτό που απορροφάται, μόνο το 3% είναι πάνω απο το έργο εξόδου

- Πόση ένταση είναι διαθέσιμη για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο;

$$I = \frac{4}{100} \frac{3}{100} I_0 = 0.0012 \cdot (10^{-6} \text{ W}/\text{cm}^2) = 1.2 \text{ nW}/\text{cm}^2$$

- Έστω οτι όλα τα φωτόνια πάνω απο το κατώφλι έχουν $\lambda=250 \text{ nm}$. Πόσα ηλεκτρόνια εκπέμπονται ανα δευτερόλεπτο;

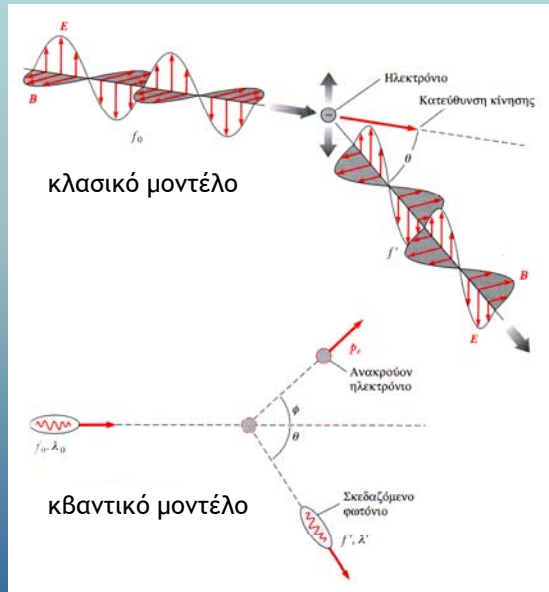
$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{250 \text{ nm}} = 4.96 \text{ eV} = 7.95 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\frac{\text{ηλεκτρόνια}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2} = \frac{1.2 \times 10^{-9} \text{ W}/\text{cm}^2}{7.95 \times 10^{-19} \text{ J}} = 1.5 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$$



Σωματιδιακή υφή φωτονίων

- Τα φωτόνια έχουν κβαντισμένες ενέργειες hf
 - η συνολική ενέργεια ενός παλμού είναι το άθροισμα πολλών φωτονίων
- Συμπεριφέρονται όμως σαν σωματίδια;
 - έχουν ορμή;
 - έχουν μάζα;
- Πειράματα σκέδασης με ακτίνες X - φαινόμενο Compton



Παράδειγμα 2.5

- Ποιό είναι το φωτορεύμα σε Amber

$$J = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(1.5 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \text{cm}^{-2}) = 2.4 \times 10^{-10} \text{ A}/\text{cm}^2$$

- Το έργο εξαγωγής για τον Fe είναι $\phi=4.5 \text{ eV}$. Ποιά η τάση αποκοπής;

$$eV_s = hf - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi \Rightarrow$$

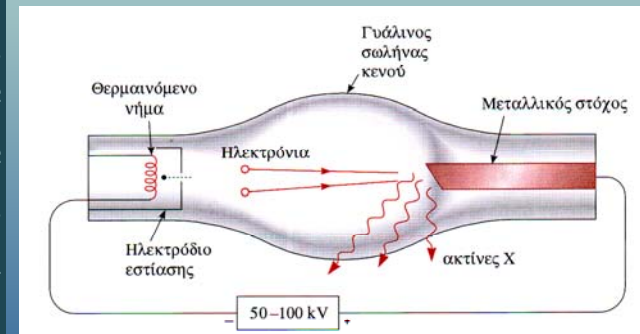
$$eV_s = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{250 \text{ nm}} - 4.5 \text{ eV} = 0.46 \text{ eV} \Rightarrow$$

$$V_s = 0.46 \text{ V}$$



Ακτίνες X

- Wilhelm Roentgen (1895)
 - όταν ηλεκτρόνια μεγάλης ταχύτητας προσπίπτουν πάνω σε μεταλλικό στόχο, πολύ διεσδυτική ακτινοβολία παράγεται

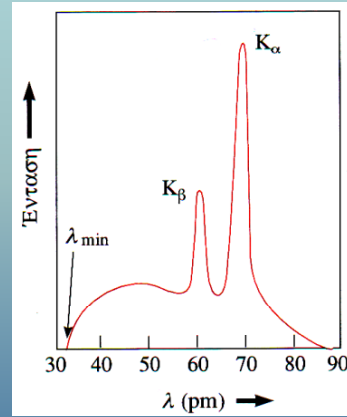




Φάσμα ακτίνων X

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Το φάσμα ακτίνων X χαρακτηρίζεται απο:
 - μια συνεχή κατανομή
 - απλή σκέδαση (επιβράδυνση) των ηλεκτρονίων στους πυρήνες του μετάλλου
 - κάθε ηλεκτρόνιο υφίσταται πολλές σκεδάσεις
- $$hf_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = eV$$
- και διακριτές φασματικές γραμμές
 - το ηλεκτρόνιο διώχνει ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο του μετάλλου και μια μετάπτωση απο υψηλότερη στάθμη έρχεται να καλύψει το κενό με εκπομπή φωτονίου
 - εξαρτάται απο το μέταλλο
 - διακριτή φύση των ενεργειακών επιπέδων



Παράδειγμα 2.6

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Τι τάση λειτουργίας χρησιμοποιήθηκε στην λυχνία ακτίνων X με το διπλό φάσμα;

$$eV = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.032 \text{ nm}} = 38750 \text{ eV} \Rightarrow V = 38.75 \text{ kV}$$

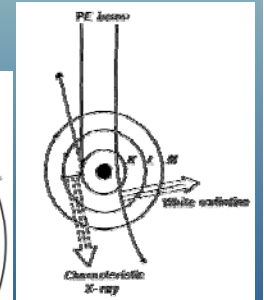
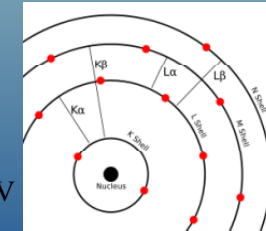
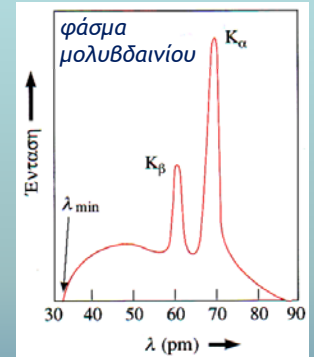
- Τα εσωτέρα ηλεκτρόνια (στιβάδα K) του μολυβδενίου έχουν ενέργεια -20 keV. Τα εξώτερα (στιβάδα M) έχουν -200 eV.

- Τι μήκος κύματος εκπέμπεται όταν ενεργητικά ηλεκτρόνια διώξουν ένα K ηλεκτρόνιο και η κενή θέση καλυφθεί από ένα M ηλεκτρόνιο;

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_{\text{initial}} - E_{\text{final}} = [-200 + 20000] \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{19800 \text{ eV}} = 0.0626 \text{ nm}$$

- Ποια η ενέργεια της σταθμης L;
- $$E_L = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.07 \text{ nm}} - 20 \text{ keV} = -2285 \text{ eV}$$



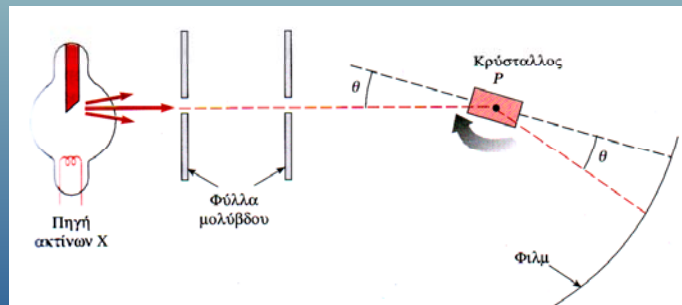
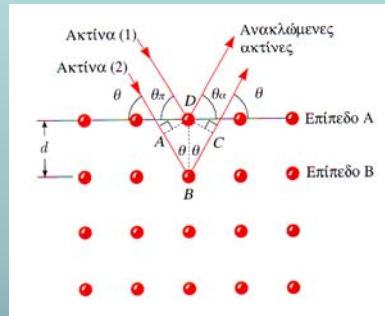
Περίθλαση ακτίνων X

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Νόμος Bragg
 - συνθήκη ενισχυτικής συμβολής:

$$AB + BC = n\lambda$$

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

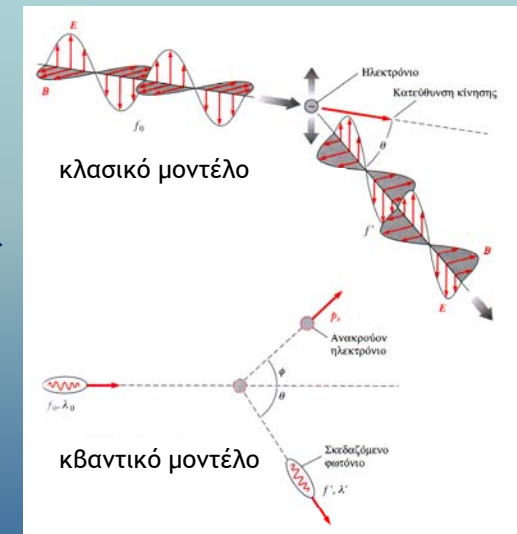


Φαινόμενο Compton

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

Σκέδαση ελεύθερων ηλεκτρονίων απο ακτίνες X

- Κλασικό μοντέλο:
 - ηλεκτρικό πεδίο επιταχύνει ηλεκτρόνια
 - επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια επαναεκπέμπουν σε μικρότερη συχνότητα
 - μεγάλη ένταση ακτινοβολίας → μεγαλύτερη επιτάχυνση → μεγαλύτερη συχνότητα επανεκπομπής
- Κβαντικό μοντέλο:
 - ?
 - μηχανική σκέδαση;
 - διατήρηση ορμής & ενέργειας;

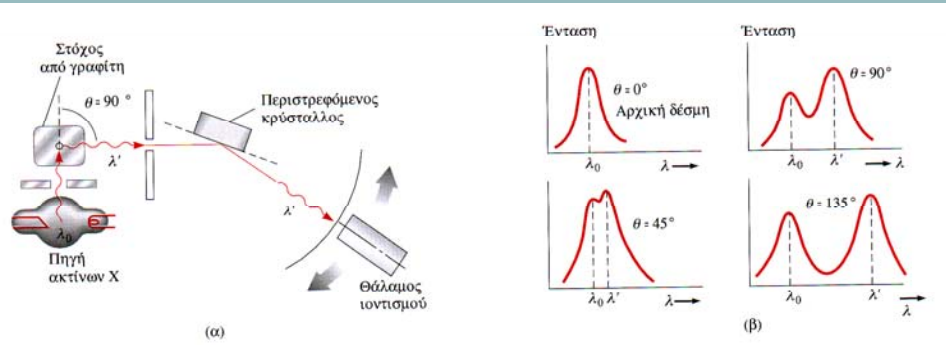




Φαινόμενο Compton

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Πειραματικά, η μετατόπιση του μήκους κύματος των ακτίνων X:
 - ανεξάρτητη της έντασης
 - εξαρτάται μόνο από την γωνία
- Η κλασική θεώρηση πάλι αποτυγχάνει



Φαινόμενο Compton

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

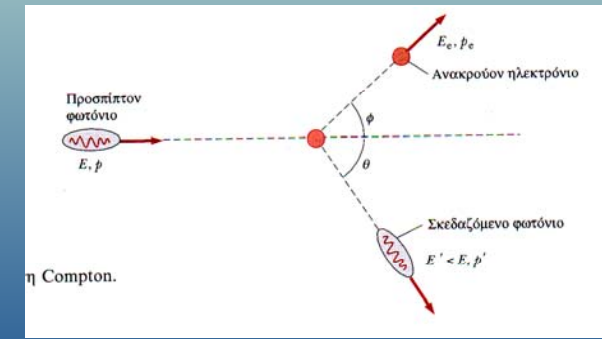
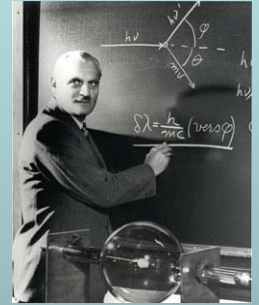
- Διατήρηση ενέργειας

$$E_{ph} + E_e = E'_{ph} + E'_e$$

- Διατήρηση ορμής

$$p_{ph} = p'_{ph} \cos \theta + p'_e \cos \phi$$

$$p'_{ph} \sin \theta = p'_e \sin \phi$$



Σχετικιστική ενέργεια και ορμή

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Οι ταχύτητες είναι σχετικιστικές → σχετικιστικές ενέργειες

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

- φωτόνιο: μηδενική μάζα ηρεμίας

$$E = pc \Rightarrow hf = pc \Rightarrow p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

- ηλεκτρόνιο: αρχικά σε ηρεμία

$$E_e = m_e c^2$$

και μετά σε κίνηση

$$E_e'^2 = p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4$$



Φαινόμενο Compton

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Διατήρηση ενέργειας

$$E_{ph} + E_e = E'_{ph} + E'_e$$

- Διατήρηση ορμής

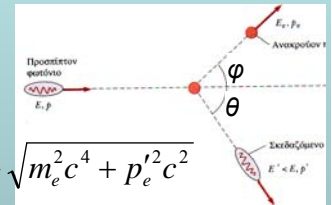
$$p_{ph} = p'_{ph} \cos \theta + p'_e \cos \phi$$

$$p'_{ph} \sin \theta = p'_e \sin \phi$$

$$hf + m_e c^2 = hf' + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e'^2 c^2}$$

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} \cos \theta + p'_e \cos \phi$$

$$\frac{hf'}{c} \sin \theta = p'_e \sin \phi$$



$$\left. \begin{aligned} [h(f - f') + m_e c^2]^2 &= m_e^2 c^4 + p_e'^2 c^2 \\ c^2 p_e'^2 &= h^2 (f^2 + f'^2 - 2f \cdot f' \cos \theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

μήκος κύματος Compton $\frac{h}{m_e c} = 0.00243 \text{ nm}$



Φωτόνια: κύμα ή σωματίδιο;

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Ενέργεια και ορμή φωτονίου
 - σωματιδιακή περιγραφή, αλλά με μεγέθη κύματος

$$E_{ph} = h \cdot f$$

$$p_{ph} = h / \lambda$$

- Σκέδαση Compton
 - σκέδαση ως σωματίδιο, αλλά με μεγέθη κύματος

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos\theta)$$

- Σωστή περιγραφή δεν γίνεται μόνο με την μία εικόνα
 - απαραίτητες και συμπληρωματικές οι δύο εικόνες
- Θα δούμε ότι παρόμοιος δυϊσμός ισχύει και για την ύλη



Παράδειγμα 2.7

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Ακτίνες X με $\lambda_0=0.2 \text{ nm}$ προσπίπτουν σε άνθρακα. Σε σκέδαση 45° ως προς την προσπίπτουσα δέσμη, ποιο μήκος κύματος των ακτίνων X παρατηρείται;

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) = 0.2 \text{ nm} + (0.00243 \text{ nm})(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\Rightarrow \lambda = 0.200711 \text{ nm}$$

- Ποιά η σχετική απώλεια ενέργειας για το φωτόνιο;

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda}}{\frac{hc}{\lambda_0}} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{0.000711 \text{ nm}}{0.200711 \text{ nm}} = 0.00355 = 0.355\%$$

- Πόση ενέργεια απορρόφησε το ηλεκτρόνιο;

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.2 \text{ nm}} - \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.200711 \text{ nm}} = 20 \text{ eV}$$



Παράδειγμα 2.7

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Σε σκέδαση 90° , ποιά η σχετική μεταβολή για ορατό φως από λυχνία υδραργύρου με $\lambda=546.1 \text{ nm}$;

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos 90^\circ) = \lambda_C \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{0.00243 \text{ nm}}{546.1 \text{ nm}} = 0.000445\%$$

- Σε σκέδαση 90° , ποιά η σχετική μεταβολή για ακτίνες X απο μολυβδαίνιο με $\lambda=0.0712 \text{ nm}$;

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{0.00243 \text{ nm}}{0.0712 \text{ nm}} = 3.41\%$$

- Σε σκέδαση 90° , ποιά η σχετική μεταβολή για ακτίνες γ απο κοβάλτιο με $\lambda=0.00106 \text{ nm}$;

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{0.00243 \text{ nm}}{0.00106 \text{ nm}} = 229\%$$

- Στα προηγούμενα αγνοήσαμε την ενέργεια σύνδεσης των ηλεκτρονίων στο μέταλλο. Πως συγκρίνεται η ενέργεια των ακτίνων X (π.χ. του μολυβδαίνιου $\lambda=0.0712 \text{ nm}$) με την ενέργεια σύνδεσης των ηλεκτρονίων (π.χ. για άνθρακα 4 eV);

$$E_{ph} = \frac{hf}{c} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.0712 \text{ nm}} = 17.4 \text{ keV}$$



Έχει μάζα το φωτόνιο;

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Κβαντική Θεωρία του Φωτός

- Το φωτόνιο “κουβαλάει” ορμή και ενέργεια

$$\text{ορμή} = \text{μάζα} \times \text{ταχύτητα} = \frac{hf}{c} \Rightarrow m_{ph} = \frac{hf}{c^2}$$

- θυμόμαστε βέβαια ότι το φωτόνιο δεν έχει μάζα ηρεμίας...

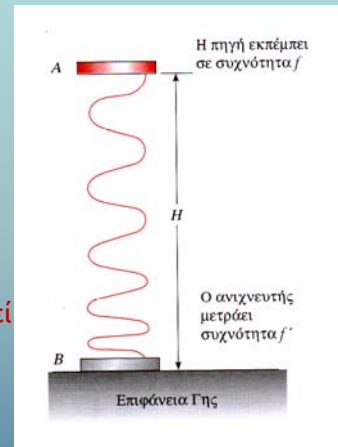
- Αυτή η μάζα έχει μετρηθεί και έχει επιβεβαιωθεί

- έλξη και παρεκτροπή φωτονίων απο άστρα
- παγίδευση απο μαύρες τρύπες
- μεταβολή συχνότητας (διατήρησης ενέργειας)

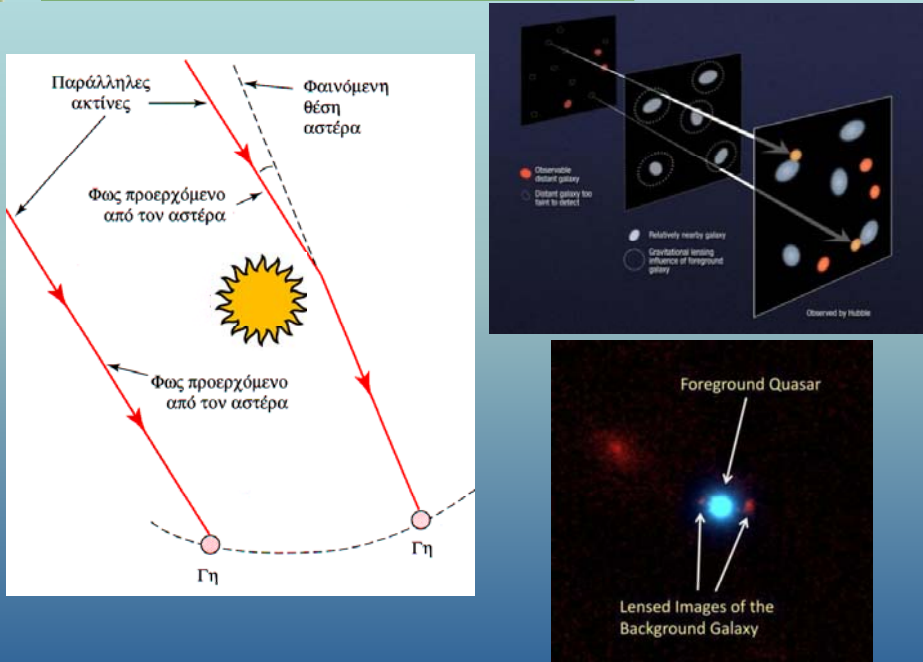
$$hf' + m'_{ph} gH' = hf + m_{ph} gH \Rightarrow h\Delta f \cong -m_{ph} g\Delta H \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{g}{c^2} \Delta H$$

αύξηση συχνότητας όταν “πέφτει” κατά ΔH
μείωση συχνότητας όταν “διαφεύγει” κατά ΔH



Βαρυτική εκτροπή φωτονίων



Βαρυτική εκτροπή φωτονίων



Πρόβλημα 2.6

- Μια λυχνία ατμών νατρίου έχει ισχύ εξόδου 10 W. Εάν το μέσο μήκος κύματος της πηγής είναι 589.3 nm, υπολογίστε τον αριθμό των φωτονίων που εκπέμπονται ανά δευτερόλεπτο.

$$\text{ενέργεια ενός φωτονίου } E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{589.3 \text{ nm}} = 2.1 \text{ eV} = 3.37 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{ροή φωτονίων} = \frac{\text{ισχύς εξόδου}}{\text{ενέργεια φωτονίου}} = \frac{10 \text{ J/s}}{3.37 \times 10^{-19} \text{ J}} = 3 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$$

Πρόβλημα 2.12

- Φως με $\lambda=500 \text{ nm}$ προσπίπτει σε μια μεταλλική επιφάνεια. Αν η τάση αποκοπής για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι 0.45 V, βρείτε:
 - την μέγιστη ενέργεια των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων
 - το έργο εξαγωγής τους
 - το μήκος κύματος κατωφλίου

$$K_{\max} = eV_s = 0.45 \text{ eV}$$

- το έργο εξαγωγής τους

$$\phi = \frac{hc}{\lambda} - eV_s = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{500 \text{ nm}} - 0.45 \text{ eV} = 2.03 \text{ eV}$$

- το μήκος κύματος κατωφλίου

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\phi} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2.03 \text{ eV}} = 611 \text{ nm}$$



Πρόβλημα 2.14

- Μια πηγή φωτός μήκους κύματος λ φωτίζει ένα μέταλλο το οποίο εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια με μέγιστη κινητική ενέργεια 1 eV. Μια δεύτερη πηγή φωτός με μήκος κύματος $\lambda/2$, όταν φωτίζει το ίδιο μέταλλο προκαλεί την εκπομπή φωτοηλεκτρονίων μέγιστης κινητικής ενέργειας 4 eV. Πόσο είναι το έργο εξαγωγής του μετάλλου;

$$E_{ph} = \phi + 1 \text{ eV}$$

$$2E_{ph} = \phi + 4 \text{ eV}$$

$$\phi + 4 \text{ eV} = 2(\phi + 1 \text{ eV}) \Rightarrow \phi = 2 \text{ eV}$$



Πρόβλημα 2.33

- Ο Compton χρησιμοποίησε φωτόνια μήκους κύματος 0.0711 nm.
 - πόση είναι η ενέργεια αυτών των φωτονίων;

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.0711 \text{ nm}} = 17440.23 \text{ eV}$$

- ποιο το μήκος κύματος των φωτονίων που οπισθοσκεδάζονται; ($\theta=180^\circ$)

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \lambda' = \lambda + 2\lambda_c = (0.0711 + 2 \cdot 0.00243) \text{ nm} = 0.07596 \text{ nm}$$

- πόση η ενέργεια των οπισθοσκεδαζόμενων φωτονίων;

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.07596 \text{ nm}} = 16324.38 \text{ eV}$$

- πόση η ενέργεια ανάκρουσης των ηλεκτρονίων σε αυτή την περίπτωση;

$$E_e = hf - hf' = (17440.23 - 16324.38) \text{ eV} = 1115.84 \text{ eV}$$



Πρόβλημα 2.19

- Δίπλα είναι η γραφική παράσταση της τάσης αποκοπής ως προς την συχνότητα του προσπίπτοντος φωτονίου για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο στο νάτριο ($h = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$)

R.A. Millikan, Phys. Rev. 7, 362 (1916)

- Ποιο το έργο εξαγωγής;

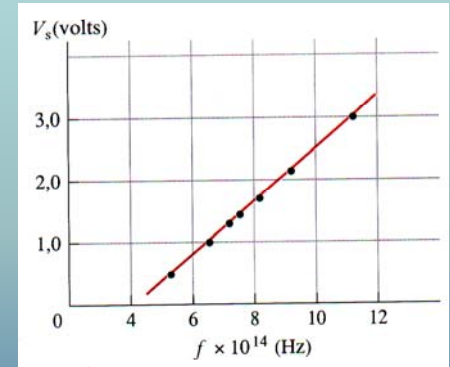
$$\phi = hf_0 = (4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(4.1 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 1.7 \text{ eV}$$

- Ποιά η τιμή του λόγου h/e ;

$$e\Delta V = h\Delta f \Rightarrow \frac{h}{e} = \frac{\Delta V}{\Delta f} = \frac{3.3 \text{ V}}{8 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 0.41 \times 10^{-14} \text{ V} \cdot \text{s}$$

- Ποιο το μήκος κύματος κατωφλίου;

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\phi} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1.7 \text{ eV}} = 730 \text{ nm}$$



Πρόβλημα 2.24

- Ένα φωτόνιο αρχικής ενέργειας 0.1 MeV υφίσταται σκέδαση Compton κατά γωνία 60° . Βρείτε:

- την ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad \lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{100000 \text{ eV}} = 0.0124 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow \lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - 0.5) \Rightarrow \lambda' = (0.0124 + 0.00243/2) \text{ nm} = 0.013615 \text{ nm}$$

$$hf' = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.013615 \text{ nm}} = 91076 \text{ eV}$$

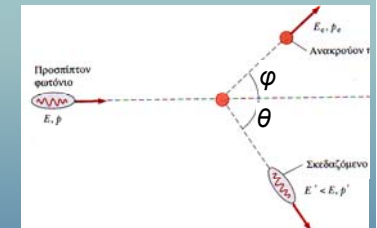
- την ενέργεια ανάκρουσης του ηλεκτρονίου

$$E = hf - hf' = 8924 \text{ eV}$$

- την γωνία ανάκρουσης του ηλεκτρονίου

$$E + mc^2 = \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_e^2 c^4} \Rightarrow p_e' c = \sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}$$

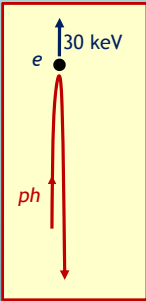
$$p_{ph}' \sin\theta = p_e' \sin\phi \Rightarrow \phi = \arcsin\left(\frac{hf'/c}{p_e'} \sin\theta\right)$$





Πρόβλημα 2.23

- Αν η μέγιστη ενέργεια που προσδίδεται σε ένα ηλεκτρόνιο σε μια σκέδαση Compton είναι 30 keV, ποιο το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου;



$$\theta = \pi \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \Rightarrow \Delta\lambda = 2\lambda_c \Rightarrow \lambda' = \lambda + 2\lambda_c$$

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = E = 30 \text{ keV}$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + 2\lambda_c} = \frac{E}{hc}$$

$$\frac{2\lambda_c}{\lambda(\lambda + 2\lambda_c)} = \frac{E}{hc} \Rightarrow 2\lambda_chc = E\lambda(\lambda + 2\lambda_c) \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda\lambda_c - \frac{2\lambda_chc}{E} = 0$$

$$\lambda = -\lambda_c + \sqrt{\lambda_c^2 + 2\lambda_chc/E} = 0.012 \text{ nm}$$