



Κβαντική Θεωρία της Ύλης

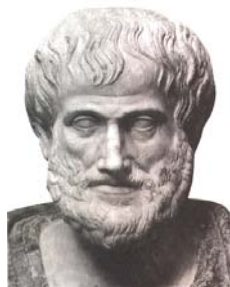
Διδάσκων: Λευτέρης Λοιδωρικής
Π11, 7146, elidorik@cc.uoi.gr
cmsl.materials.uoi.gr/elidorik

Σωματιδιακή φύση της ύλης

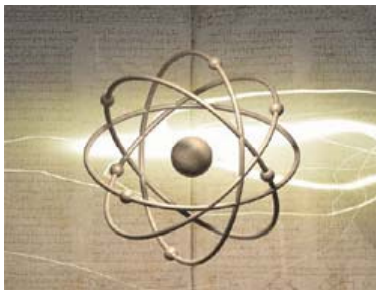
Από τι αποτελείται η ύλη;

- Από τα πιά «καυτά» ερωτήματα, από τους αρχαίους χρόνους

Αριστοτέλης



Δημόκριτος



Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα είχαν αποδεχθεί την ατομική υπόθεση.

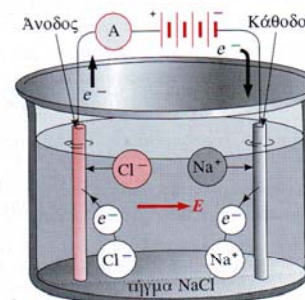
Όμως τα άτομα, από τι αποτελούνται;

Ηλεκτρόλυση NaCl

- Michael Faraday (1833)
 - η μάζα σε γραμμάρια που απελευθερώνεται στα ηλεκτρόδια:

$$m = \frac{A_B}{\text{σθένος}} \cdot \frac{q}{96500 \text{ C}}$$

1 Farad = 96500 C



Αποδεικνύει:

- ατομική φύση φύση ύλης: μόρια, άτομα
- θετικά και αρνητική φορτία στα άτομα
- ακέραια φορτία στα άτομα



Ηλεκτρόλυση

- Από που προκύπτει το 96500 C;
 - υπόδειξη: αποδείξτε το τύπο, χρησιμοποιώντας όσα ήδη γνωρίζουμε
 - έστω ότι διέρχεται συνολικό φορτίο q
 - σε πόσα άτομα αντιστοιχεί;

$$m = \frac{A_B}{\text{σθένος}} \cdot \frac{q}{96500 \text{ C}}$$

$$\text{άτομα} = \frac{q}{\text{φορτίο ιόντος}} = \frac{q}{\text{σθένος} \cdot e}$$

- άρα η συνολική μάζα;

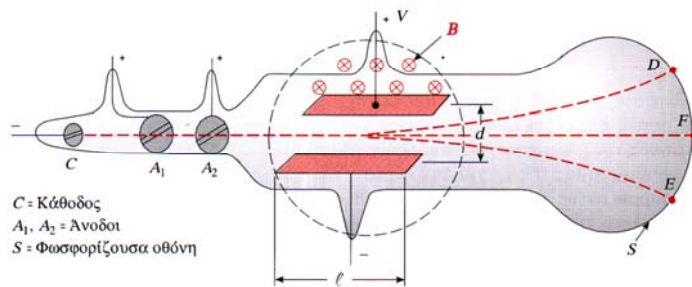
$$m = \text{άτομα} \times \text{μάζα ατόμου} = \frac{q}{\text{σθένος} \cdot e} \cdot \frac{A_B}{N_A} = \frac{A_B}{\text{σθένος}} \cdot \frac{q}{e \cdot N_A}$$

$$e \cdot N_A = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(6.023 \times 10^{23} \text{ atoms/mol}) = 96500 \text{ C} \cdot \text{atoms/mol}$$



Ηλεκτρόνιο

- Joseph John (J.J.) Thomson (1897)
 - οι καθοδικές ακτίνες από τι αποτελούνται;
 - κύματα ή σωματίδια;
 - φορτισμένα σωματίδια
 - τα ίδια, ανεξάρτητα από ποιο υλικό ξεκίνησαν
 - τι μάζα και φορτίο όμως είχαν;
- κάθετο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στη δέσμη



Παράδειγμα 3.1

- Πόσα γραμμάρια βαρίου και χλωρίου θα πάρουμε αν διοχετεύσουμε ρεύμα 10 A μέσα από τήγμα BaCl_2 για 1 ώρα;

$$m = \frac{A_B}{\text{σθένος}} \cdot \frac{q}{96500 \text{ C}}$$

$$\text{συνολικό φορτίο: } q = I \cdot t = (10 \text{ C/s}) \cdot (3600 \text{ s}) = 36000 \text{ C}$$

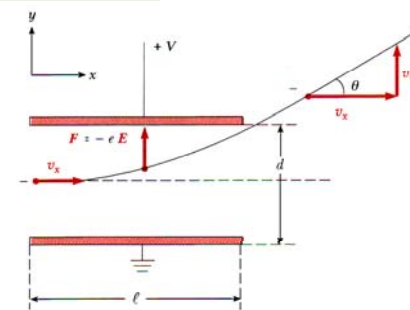
$$\text{μάζα βαρίου: } m_{\text{Ba}} = \frac{A_{\text{Ba}}}{\text{σθένος}_{\text{Ba}}} \cdot \frac{q}{e \cdot N_A} = \frac{(137 \text{ gr}) \cdot (36000 \text{ C})}{2 \cdot 96500 \text{ C}} = 25.6 \text{ g}$$

$$\text{μάζα χλωρίου: } m_{\text{Cl}} = \frac{A_{\text{Cl}}}{\text{σθένος}_{\text{Cl}}} \cdot \frac{q}{e \cdot N_A} = \frac{(35.5 \text{ gr}) \cdot (36000 \text{ C})}{1 \cdot 96500 \text{ C}} = 13.2 \text{ g}$$



Μέτρηση λόγου e/m

- Κάθετο ηλεκτρικό πεδίο
 - ταχύτητα σωματιδίων: u_x
 - μάζα και φορτίο: m, e
 - ηλεκτρικό πεδίο: $E=V/d$
 - μήκος πυκνωτή: l
- ποιά η εκτροπή της δέσμης;
 - ποιά η γωνία θ κατά την έξοδο;



$$\text{κάθετη επιτάχυνση: } a = \frac{e \cdot E}{m} = \frac{e \cdot V}{m \cdot d}$$

$$\text{κάθετη ταχύτητα στην έξοδο: } v_y = at = \frac{eV}{md} \left(\frac{l}{v_x} \right)$$

$$\text{γωνία εξόδου: } \tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eVl}{mdv_x^2}$$

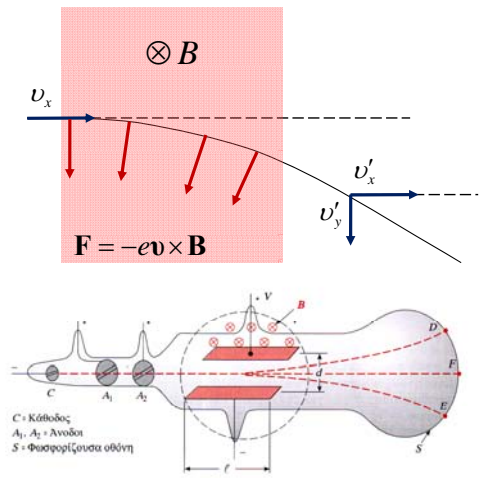
$$\Rightarrow \frac{e}{m} = \tan \theta \frac{dv_x^2}{Vl}$$

το μόνο άγνωστο είναι η ταχύτητα u_x

Μέτρηση λόγου e/m

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- **Κάθετο μαγνητικό πεδίο**
 - δύναμη κάθετη στην κίνηση
 - σταθερό μέτρο δύναμης
 - σταθερό μέτρο ταχύτητας
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα E και B αλληλοεξουδετερόμενα;



• **Συνθήκη ισορροπίας:**

$$F_{\text{ηλεκτρ}} = F_{\text{μαγν}} \Rightarrow e \frac{V}{d} = e v_x B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{V}{B \cdot d}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{V \tan \theta}{B^2 d \cdot l}$$

μετρήθηκε $e/m = 1 \times 10^{11} \text{ C/kg}$
 (σημερινή τιμή $1.75 \times 10^{11} \text{ C/kg}$)
 για ιόν υδρογόνου $1 \times 10^8 \text{ C/kg}$!

Παράδειγμα 3.2

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Ο Thomson χρησιμοποίησε $V=200 \text{ V}$, $l=5 \text{ cm}$, και $d=1.5 \text{ cm}$, και μέτρηση $\theta=0.2 \text{ rad}$. Χρησιμοποιώντας την σημερινή τιμή $e/m = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$
 - τι μαγνητικό πεδίο B χρησιμοποίησε για να ανατρέψει την απόκλιση λόγω ηλεκτρικού πεδίου; Πως συγκρίνεται με το μαγνητικό πεδίο της γης; (0.5 gauss)

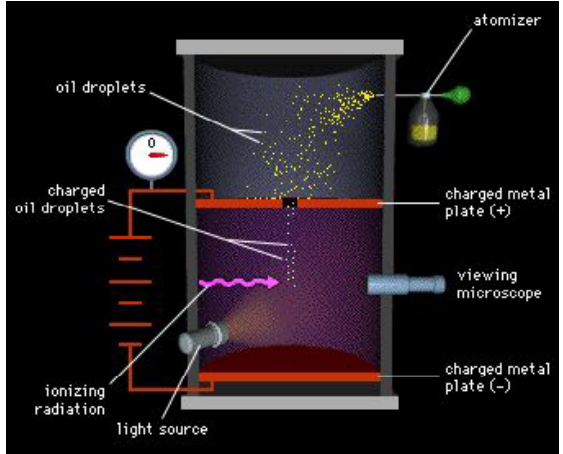
$$\frac{e}{m} = \frac{V \tan \theta}{B^2 d \cdot l}$$

$$B = \sqrt{\frac{V \tan \theta}{(e/m) \cdot d \cdot l}} = 5.5 \times 10^{-4} \text{ T} = 5.5 \text{ gauss}$$

Η τιμή του θεμελιώδους φορτίου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

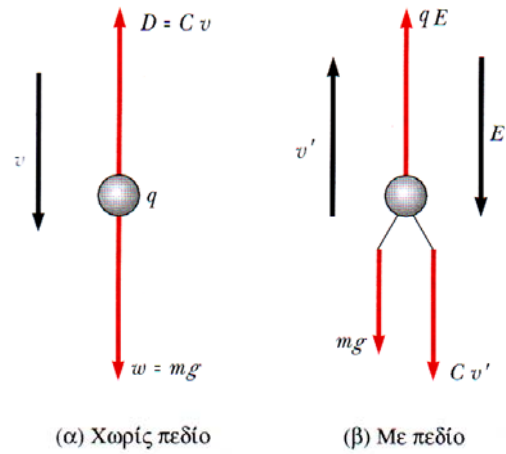
- Ο Thomson μέτρηση κάτι που είναι:
 - 1000 φορές ελαφρύτερο απο το ιόν του υδρογόνου;
 - 1000 μεγαλύτερο φορτίο απο το ιόν του υδρογόνου;
 - ή κάτι ανάμεσα;
- Πείραμα σταγόνας ελαίου του Robert Millikan (1911)



Η τιμή του θεμελιώδους φορτίου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- **Φορτισμένες σταγόνες ελαίου:**
 - σταθερή οριακή ταχύτητα λόγω αντίστασης αέρα: $C \cdot v$
 - ελεύθερη πτώση $m \cdot g = C \cdot v$
 - άνοδος όταν εφαρμόζουμε ηλεκτρικό πεδίο



$$m \cdot g + C \cdot v' = qE$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{qE - mg}{mg} = \frac{qE}{mg} - 1$$

$$q = \frac{mg}{E} \frac{v + v'}{v}$$

άγνωστο: η μάζα m της σταγόνας!



Η τιμή του θεμελιώδους φορτίου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Για την τιμή του φορτίου χρειαζόμαστε την μάζα της σταγόνας
 - την βρίσκουμε απο την ελεύθερη πτώση της σταγόνας

- νόμος Stokes για την τριβή:

$$C = 6\pi a \xi$$

a : ακτίνα της σταγόνας
 ξ : συντελεστής ιξώδους του αέρα

- σε ελεύθερη πτώση

$$m \cdot g = C \cdot v \Rightarrow mg = 6\pi a \xi v$$

- μάζα σταγόνας

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

ρ : πυκνότητα μάζας ελαίου

- ακτίνα σταγόνας

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho g = 6\pi a \xi v \Rightarrow 2a^2 \rho g = 9\xi v \Rightarrow a = \sqrt{\frac{9\xi v}{2\rho g}}$$

μετράμε ταχύτητα πτώσης, βρίσκουμε ακτίνα και μάζα



Η τιμή του θεμελιώδους φορτίου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Όμως, μια σταγόνα δεν έχει πάντα το ίδιο φορτίο
 - ποιά η τιμή του θεμελιώδους φορτίου;
- διαδοχικά ανεβάζουμε και κατεβάζουμε την ίδια σταγόνα
 - η μάζα της παραμένει ίδια \rightarrow ίδια ταχύτητα πτώσης v
 - αλλαγή φορτίου \rightarrow αλλαγές στην ταχύτητα ανόδου

$$q_1 = \frac{mg}{E} \frac{v+v'_1}{v} \quad q_2 = \frac{mg}{E} \frac{v+v'_2}{v} \quad q_3 = \frac{mg}{E} \frac{v+v'_3}{v} \quad \dots$$

- λόγοι ακέραιων αριθμών \rightarrow κβάντωση φορτίου

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v+v'_1}{v+v'_2} \quad \frac{q_2}{q_3} = \frac{v+v'_2}{v+v'_3} \quad \frac{q_1}{q_3} = \frac{v+v'_1}{v+v'_3} \quad \dots$$

- ο Millikan κατέληξε οτι $e = 1.64 \times 10^{-19} \text{ C}$
- ενώ η σωστή τιμή είναι $e = 1.602176487 \times 10^{-19} \text{ C}$



Μοντέλο ατόμου;

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Η ηλεκτρίση συνεπάγεται τη ρήξη του ατόμου
- Διακριτές φασματικές γραμμές εκπέμπονται απο τα άτομα
- Ραδιενέργεια και ραδιενεργοί μετασχηματισμοί ατόμων

- Ποιά η δομή του ατόμου;

- κάτι σαν «σταφιδόψωμο»;

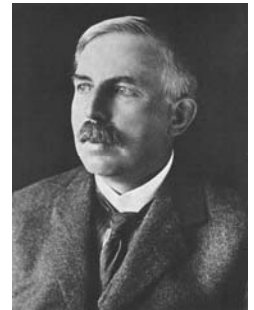
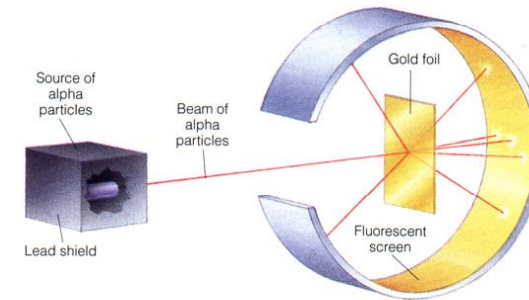
- ομοιογενής κατανομή μάζας θετικών και αρνητικών σωματιδίων
 - βαριά πρωτόνια και ελαφρά ηλεκτρόνια
- ομοιογενές θετικό φορτίο και ηλεκτρόνια σφηνωμένα ανάμεσα;
 - αρχικό μοντέλο του Thomson



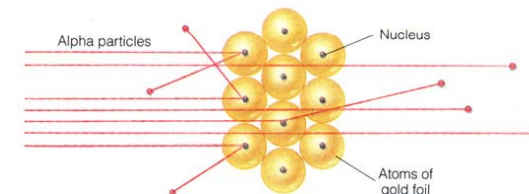
Πυρηνικό μοντέλο για το άτομο

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Ernest Rutherford (1909)
 - σκέδαση σωματιδίων α σε λεπτά φύλλα βαρέων μετάλλων



«Ένας πολύ μικρός αριθμός σωματιδίων σκεδάζονταν σε μεγάλες γωνίες, και μερικά οπισθοσκεδάζονταν.»



«Σαν να είχες πυροβολήσει ένα κομμάτι χαρτί με βλήμα 15 ιντσών και το βλήμα να γύριζε πίσω και να σε χτυπούσε»

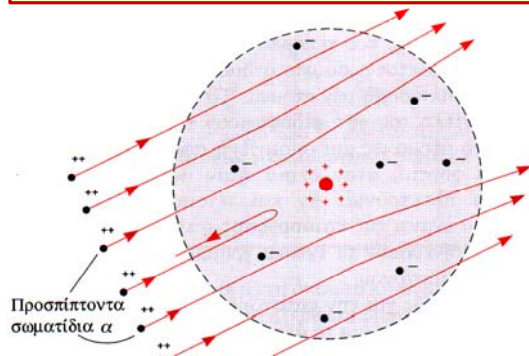


Πυρηνικό μοντέλο για το άτομο

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Σωματίδια α είναι πυρήνες ηλίου
 - 2 πρωτόνια και 2 νετρόνια, φορτίο +2e
- Κατανεμημένη μάζα μέσα στο άτομο:
 - πολλές μικρές σκεδάσεις → μικρές γωνίες σκέδασης
- Συγκεντρωμένη μάζα σε πολύ μικρό χώρο
 - λίγες αλλά ισχυρές σκεδάσεις → μεγάλες γωνίες σκέδασης

→ πυρηνικό (πλανητικό) μοντέλο ατόμου

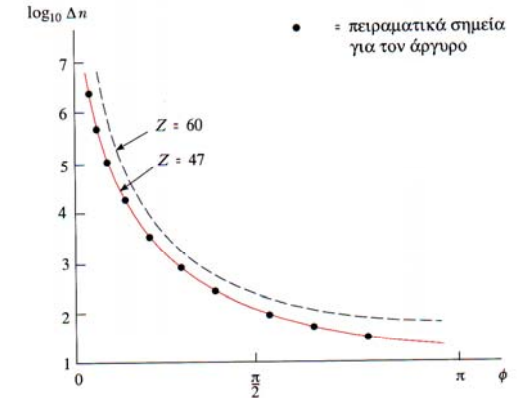
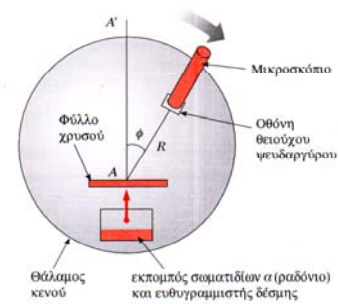


Ενεργός διατομή σκέδασης

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Η σκέδαση λόγω δυνάμεων Coulomb $F = k \frac{(2e)(Ze)}{r^2}$
- Ενεργός διατομή σκέδασης
- Αποδεικνύεται οτι
 - όλη η μάζα του ατόμου συγκεντρωμένη στον πυρήνα
 - το Z είναι περίπου το μισό του ατομικού βάρους!

$$\Delta n = \frac{k^2 Z^2 e^4 N n A}{R^2 m_\alpha^2 v_\alpha^4 \sin^4(\phi/2)}$$



Η ακτίνα του πυρήνα

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Ο τύπος της σκέδασης ισχύει για σωματίδια α που δεν εισέρχονται στον πυρήνα του ατόμου. Σε πολύ μεγάλες ενέργειες, όμως, μπορεί και να «εισχωρήσουν» στον πυρήνα. Τότε παύει η ισχύς της θεωρίας. Μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να «μετρήσουμε» τον πυρήνα;
 - μεγαλώνουμε την ενέργεια των σωματιδίων α μέχρι να παρατηρήσουμε απόκλιση των αποτελεσμάτων από τον τύπο της σκέδασης
 - τότε τα σωματίδια α μόλις που φτάνουν τα όρια του πυρήνα
 - ο πυρήνας θεωρείται μεγάλος και άρα ακίνητος



διατήρηση ενέργειας: $r = \frac{4kZe^2}{m_\alpha v_\alpha^2}$



Παράδειγμα 3.5

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Για σωματίδια α ενέργειας 7.7 eV πάνω σε φύλλο αλουμινίου, ο Rutherford παρατήρησε αποκλίσεις από την θεωρητική σκέδαση. Ποιά η ακτίνα του πυρήνα του Al (Z=13);

$$r = \frac{2kZe^2}{\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{2 \cdot (8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \cdot 13 \cdot (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(7.7 \text{ eV})(1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}$$

$r = 4.9 \times 10^{-15} \text{ m}$

$10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm (femtometer)}$

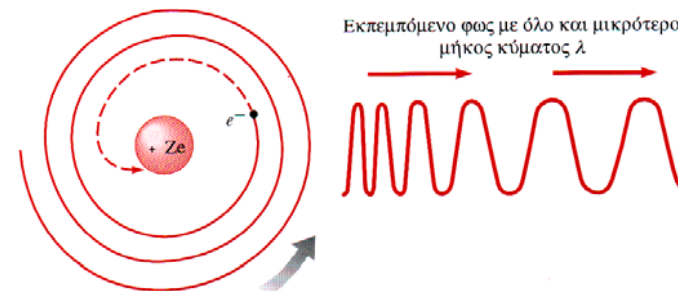
Πυρηνικό μοντέλο για το άτομο

Απάντησε κάποιες ερωτήσεις αλλά δημιούργησε πολλές περισσότερες:

- **όλη η μάζα του ατόμου συγκεντρωμένη στον πυρήνα**
 - ακτίνα πυρήνα $\sim 10^{-14}$ m
 - ακτίνα ατόμου $\sim 10^{-10}$ m
 - και ο υπόλοιπος χώρος;
- **το Z είναι περίπου το μισό του ατομικού βάρους!**
 - δηλαδή η μισή μάζα του πυρήνα είναι φορτισμένη
 - η άλλη μισή μάζα του πυρήνα;
- **Τι κρατάει τα πρωτόνια στον πυρήνα;**
 - τα ομόνομα φορτία δεν απωθούνται;
- **Τι κρατάει τα ηλεκτρόνια μακριά από τον πυρήνα;**
 - τα ετερόνομα φορτία δεν έλκονται;
 - κίνηση σε τροχιές γύρω από τον πυρήνα.
- **Πως κινούνται τα ηλεκτρόνια γύρω από τον πυρήνα;**
 - πως αυτή η κίνηση εξηγεί τις φασματικές γραμμές εκπομπής;

Αποτυχία κλασικού πυρηνικού ατόμου

- **Ήταν γνωστό πώς κάθε επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο ακτινοβολεί**
 - ηλεκτρόνιο σε τροχιά υφίσταται επιτάχυνση
 - άρα ακτινοβολεί και κάνει ενέργεια
 - άρα πέφτει σε χαμηλότερες τροχιές, μεγαλύτερης ταχύτητας και επιτάχυνσης
 - άρα ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητικά κύματα όλο και μεγαλύτερης συχνότητας
 - αναγκαστικά κάποια στιγμή πέφτει στον πυρήνα

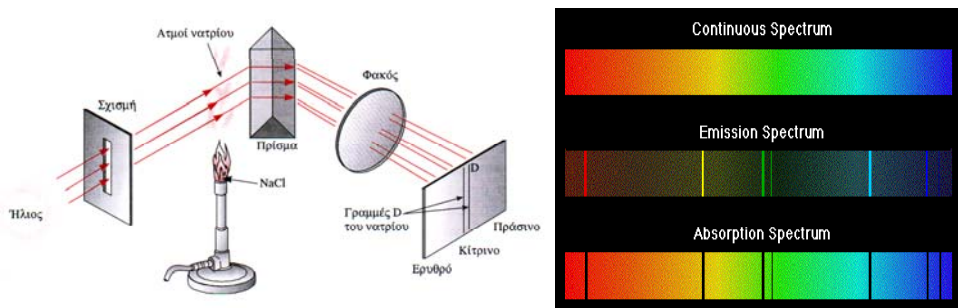


- **Η ύλη όμως είναι σταθερή και δεν ακτινοβολεί πάντα**
 - άρα δεν ισχύει η κλασική ηλεκτροδυναμική!

Καταρίπτεται όλο το κλασικό οικοδόμημα

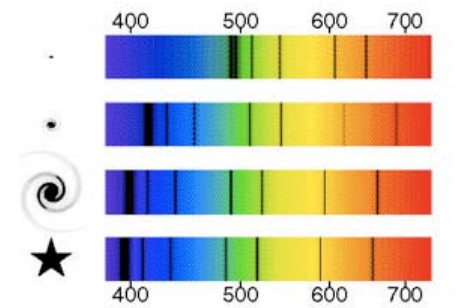
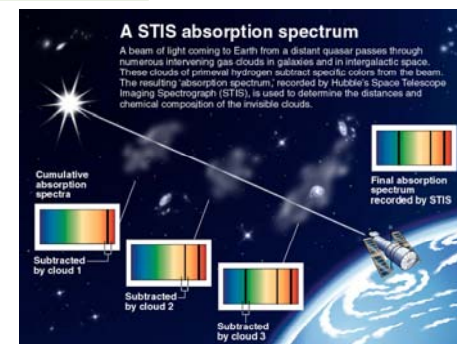
Φασματοσκοπία

- **Gustav Kirchhoff (1860)**
 - **φασματοσκοπία εκπομπής**
 - αναγνώριση στοιχείων
 - ανακάλυψη νέων στοιχείων
 - αναγνώριση της σύστασης μετεωριτών
 - **φασματοσκοπία απορρόφησης**
 - σκοτεινές αντί για φωτεινές γραμμές
 - αναγνώριση στοιχείων
 - αναγνώριση στοιχείων του εξωτερικού φλοιού του ήλιου
 - αναγνώριση στοιχείων σε μακρινά άστρα



Η φασματοσκοπία σήμερα

- **Φασματόμετρο ατομικής απορρόφησης**
 - μέτρηση μικρών συγκεντρώσεων μετάλλων σε άγνωστα υλικά
- **Σύσταση διαστημικής ύλης**
- **Ταχύτητα και απόσταση μακρινών γαλαξιών**
 - **μετατόπιση Doppler:** μεταβολή του μήκος κύματος συνάρτηση της σχετικής ταχύτητας
$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c}$$
 - όσο μεγαλύτερη ταχύτητα έχει ένας γαλαξίας, τόσο πιο απομακρυσμένος είναι





Φασματοσκοπικές σειρές του H

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Johann Balmer (1885)
 - εμπειρική ερμηνεία για το ορατό φάσμα του υδρογόνου

$$\lambda(\text{cm}) = C_2 \left(\frac{n^2}{n^2 - 2^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots$$



410.2 434.1 486.1 656.3

Γενική σχέση

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

σταθερά Rydberg
 $R = 1.0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

Σειρά Lyman (uv)	$n_f = 1$	$n_i = 2, 3, 4 \dots$
Σειρά Balmer (vis-uv)	$n_f = 2$	$n_i = 3, 4, 5 \dots$
Σειρά Paschen (IR)	$n_f = 3$	$n_i = 4, 5, 6 \dots$
Σειρά Brackett (IR)	$n_f = 4$	$n_i = 5, 6, 7 \dots$
Σειρά Pfund (IR)	$n_f = 5$	$n_i = 6, 7, 8 \dots$



Το άτομο Bohr του υδρογόνου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Κυκλικές τροχιές γύρω από τον πυρήνα
 - ελκτική δύναμη Coulomb
- Μόνο ορισμένες σταθερές τροχιές
 - χωρίς ακτινοβολία
 - ισχύει η κλασική μηχανική
- Οι σταθερές τροχιές έχουν κβαντισμένη στροφορμή $L = mvr = n\hbar$
 - ακέραια πολλαπλάσια του $\hbar = h/2\pi$
- Ακτινοβολία μόνο κατά τις μεταβάσεις $hf = E_i - E_f$
 - η μετάβαση δεν περιγράφεται κλασικά
 - η συχνότητα εκπομπής από την διαφορά ενέργειας, όχι από την συχνότητα περιστροφής

$$F = -k \frac{e^2}{r^2}$$

$$hf = E_i - E_f$$

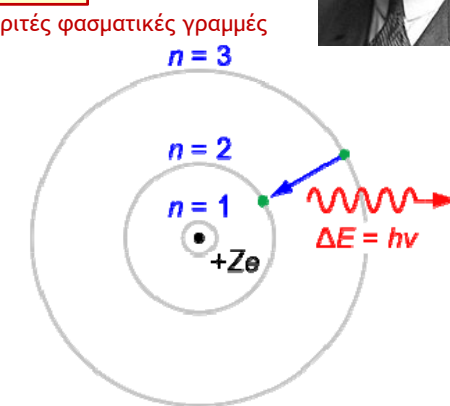
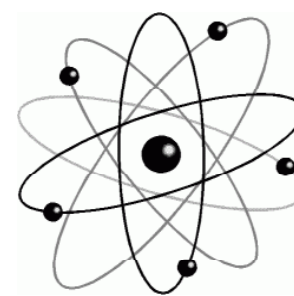


Το άτομο Bohr

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Niels Bohr (1913)
 - η κλασική θεωρία της ακτινοβολίας δεν ισχύει στα άτομα
 - τα ηλεκτρόνια βρίσκονται σε κβαντισμένες τροχιές → σαν στάσιμα κύματα → στάσιμες καταστάσεις
 - φωτόνια εκπέμπονται μόνο στη μετάβαση μεταξύ σταθμών

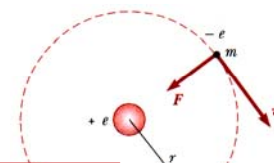
$$hf = E_i - E_f$$



Το άτομο Bohr του υδρογόνου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Κυκλική τροχιά: ακτίνα r , ταχύτητα u
- Δυναμική ενέργεια:
- Κινητική ενέργεια:
- Ολική ενέργεια:
- Στροφορμή:



$$E_U = -k \frac{e^2}{r}$$

$$\frac{mv^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k \frac{e^2}{r}$$

$$E = E_K + E_U = -\frac{1}{2}k \frac{e^2}{r}$$

$$L = mvr = n\hbar$$

- Κβαντισμένη ακτίνα τροχιάς: $m \left(\frac{n\hbar}{mr} \right)^2 = k \frac{e^2}{r} \Rightarrow r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{mke^2}$
- Κβαντισμένη ενέργεια: $E_n = -\frac{1}{2} \frac{mk^2 e^4}{n^2 \hbar^2}$



Το άτομο Bohr του υδρογόνου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

Για n=1:

- η ακτίνα Bohr

$$\alpha_0 = r_1 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0.529 \text{ \AA}$$

- η ενέργεια

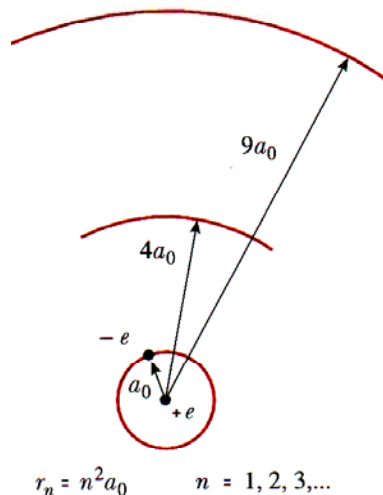
$$E_1 = -\frac{1}{2} \frac{mk^2e^4}{\hbar^2} = -\frac{ke^2}{2\alpha_0} = -13.6 \text{ eV}$$

Για τα υπόλοιπα τροχιακά:

$$r_n = \alpha_0 n^2 \quad E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

Σε μετάβαση

$$hf = -E_1 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$



Το άτομο Bohr του υδρογόνου

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

Σύνδεση με το φάσμα του υδρογόνου

- εμπειρικά είχε βρεθεί

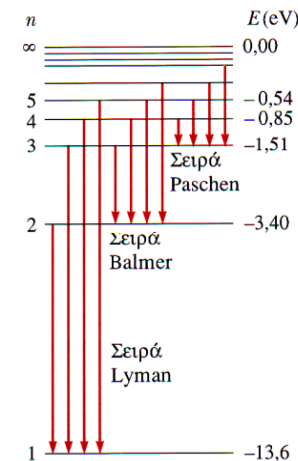
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

- απο τη θεωρία του Bohr

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{ke^2}{2\alpha_0} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{ke^2}{2\alpha_0 hc} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{2(0.529 \times 10^{-10} \text{ m})(6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = R$$

Πλήρης εξήγηση του φάσματος του υδρογόνου!



Θεωρία Bohr για υδρογονοειδή άτομα

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

Υδρογονοειδές άτομο

- ιονισμένο άτομο που του έχει μείνει μόνο ένα ηλεκτρόνιο
- π.χ. He⁺, Li²⁺, Be³⁺, ...
- φορτίο πυρήνα +Z·e

Ακτίνα τροχιακού

$$r_n = n^2 \frac{\alpha_0}{Z}$$

Ενέργεια τροχιακού

$$E_n = E_1 \frac{Z^2}{n^2}$$



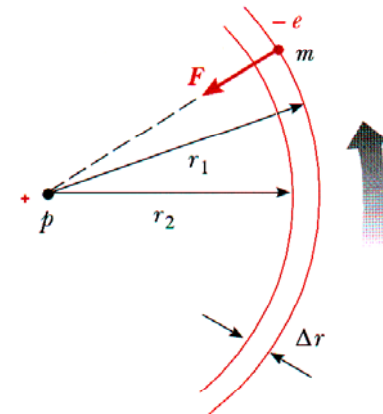
Κβάντωση στροφορμής κατά Bohr

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

Πώς προέκυψε στον Bohr η κβάντωση;

Αρχή της αντιστοιχίας

- Στα πολύ μεγάλα n πρέπει να προκύπτουν οι κλασικοί νόμοι
- η εκπομπή έχει την ίδια συχνότητα με την συχνότητα περιστροφής
- η ενέργεια του φωτονίου προκύπτει απο την δράση της κεντρομόλου



ταχύτητα ηλεκτρονίου: $v = 2\pi f r$

κεντρομόλος: $F_c = \frac{mv^2}{r} = 4\pi^2 m f^2 r$

ενέργεια φωτονίου: $hf = F_c \Delta r = 4\pi^2 m f^2 r \Delta r \Rightarrow h = 2\pi m v \Delta r$

θεωρώντας ότι v και m μένουν σταθερά κατά την μετάβαση

$$h = 2\pi \Delta(mvr) \Rightarrow \frac{h}{2\pi} = \hbar = \Delta L$$



Παράδειγμα 3.6

- Οι μυστηριώδεις γραμμές που παρατηρήθηκαν από τον Pickering το 1896 στο φάσμα του αστέρα ζ-Πρύμνης προσαρμόζονται στον εμπειρικό τύπο:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2} \right)$$

- Από ποιο ιονισμένο αέριο προκύπτουν;



Παράδειγμα 3.8

- Η σειρά Balmer για το άτομο του υδρογόνου αντιστοιχεί σε μεταβάσεις που καταλήγουν στην στάθμη $n_f=2$.
 - Βρείτε το μέγιστο και ελάχιστο μήκος κύματος της σειράς

μέγιστο μήκος κύματος: ελάχιστη ενέργεια φωτονίου $\Rightarrow n_i=3$

$$hf_{\min} = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5 \cdot 13.6}{36} \text{ eV} = 1.89 \text{ eV}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1.89 \text{ eV}} = 656.5 \text{ nm}$$

ελάχιστο μήκος κύματος: μέγιστη ενέργεια φωτονίου $\Rightarrow n_i=\infty$

$$hf_{\max} = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{13.6}{4} \text{ eV} = 3.4 \text{ eV}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{3.4 \text{ eV}} = 364.7 \text{ nm}$$



Παράδειγμα 3.7

- Το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου μεταβαίνει από τη στάθμη $n=2$ στην θεμελιώδη $n=1$.
 - ποιο το μήκος κύματος και η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου;

$$hf = -E_1 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$= 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3 \cdot 13.6}{4} \text{ eV} = 10.2 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10.2 \text{ eV}} = 121.5 \text{ nm}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{121.5 \times 10^{-9} \text{ m}} = 2.47 \times 10^{15} \text{ Hz}$$



Παράδειγμα 3.9

- Στο φάσμα εκπομπής εμφανίζονται όλες οι φασματικές γραμμές.
 - στο φάσμα απορρόφησης δεν εμφανίζονται πάντα όλες. Γιατί;

το άτομο πρέπει να είναι διεγερμένο σε στάθμη $n_i > 1$ για απορρόφηση και μετάβαση από n_i σε $n_f > n_i$. Σε χαμηλές θερμοκρασίες όλα τα ηλεκτρόνια βρίσκονται στη θεμελιώδη $n_i=1$ στάθμη
- Για ποιές θερμοκρασίες αερίου υδρογόνου παρατηρούμε την σειρά Balmer στο φάσμα απορρόφησης;
 - σε ποιά θερμοκρασία ο αριθμός των ατόμων που είναι διεγερμένα στην $n=2$ στάθμη είναι το 10% αυτών που παραμένουν στην θεμελιώδη $n=1$ στάθμη;

$$E_1 = -13.6 \text{ eV} \quad E_2 = -13.6/4 \text{ eV} = -3.4 \text{ eV}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 0.1 = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} = e^{-(E_2-E_1)/kT} = e^{-10.2/kT}$$

$$\ln(0.1) = -10.2/kT \Rightarrow T = -\frac{10.2 \text{ eV}}{(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}) \cdot \ln(0.1)} = 51390 \text{ K}$$



Πρόβλημα 3.3

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Σε ποιά σειρά του φάσματος του υδρογόνου και σε ποιά n_i αντιστοιχεί η γραμμή με μήκος κύματος 102.6 nm;

$$hf = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{102.6 \text{ nm}} = 12.08577 \text{ eV} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = \frac{12.08577}{13.6} = 0.88866$$

$$hf = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{1}{n_i^2} = \frac{1}{n_f^2} - 0.88866$$

$$n_i = \frac{n_f}{\sqrt{1 - n_f^2 \cdot 0.88866}}$$

για σειρά Lyman $n_i = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.88866}} = 3$

για σειρά Balmer $n_i = \frac{2}{\sqrt{1 - 4 \times 0.88866}} = \text{αδύνατο}$



Πρόβλημα 3.30

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση $n=3$ και μεταπίπτει στην θεμελιώδη κατάσταση εκπέμποντας ένα φωτόνιο
 - τι ορμή και κινητική ενέργεια αποκτάει το άτομο λόγω ανάκρουσης;
 - ενέργεια φωτονίου

$$hf = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = \frac{8}{9} 13.6 \text{ eV} = 12.0889 \text{ eV}$$

- ορμή φωτονίου (και άρα ανάκρουση του ατόμου)

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{(12.0889 \text{ eV})(1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 6.45547 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

- κινητική ενέργεια ανάκρουσης του ατόμου

$$E_K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(6.45547 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}{2 \cdot 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 12.46 \times 10^{-27} \text{ J} = 7.8 \times 10^{-8} \text{ eV}$$



Πρόβλημα 3.5

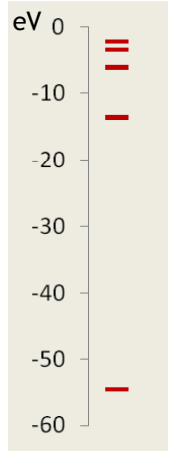
Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Κατασκευάστε ένα διάγραμμα ενεργειακών σταθμών για το ιόν He^+ , το οποίο έχει $Z=2$.

$$E_1 = -13.6 \frac{2^2}{1^2} = -54.4 \text{ eV} \quad E_2 = -13.6 \frac{2^2}{2^2} = -13.6 \text{ eV}$$

$$E_3 = -13.6 \frac{2^2}{3^2} = -6.044 \text{ eV} \quad E_4 = -13.6 \frac{2^2}{4^2} = -3.4 \text{ eV}$$

- Πόσο είναι το έργο ιονισμού του He^+ ;
54.4 eV



Πρόβλημα 3.15

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Σωματιδιακή Φύση της Ύλης

- Ξεκινώντας από την σχέση $hf = \frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$
 - αποδείξτε ότι για μεταβάσεις μεταξύ διαδοχικών n η συχνότητα εκπομπής τείνει στο κλασικό αποτέλεσμα όταν $n \rightarrow \infty$

$$hf = \frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{n^2 - (n-1)^2}{n^2(n-1)^2} \right) \rightarrow \frac{mk^2 e^4}{n^3 \hbar^2}$$

$$\Rightarrow f \rightarrow \frac{mk^2 e^4}{2\pi n^3 \hbar^3}$$

- Το κλασικό αποτέλεσμα είναι ότι η συχνότητα εκπομπής συμπίπτει με την συχνότητα περιφοράς

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = \frac{v}{2\pi r} \\ r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{mke^2} \end{array} \right\} v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} \Rightarrow \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}} = \sqrt{\frac{ke^2}{m} \frac{m^3 k^3 e^6}{n^6 \hbar^6}}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{2\pi r} = \frac{mk^2 e^4}{2\pi n^3 \hbar^3}$$



Ερώτηση 3.3

- Μπορεί το ηλεκτρόνιο στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου να απορροφήσει ένα φωτόνιο ενέργειας:
 - (α) μικρότερης από 13.6 eV;
 - (β) μεγαλύτερης από 13.6 eV;