



Κβαντική Θεωρία της Ύλης

Διδάσκων: Λευτέρης Λοιδωρίκης
Π1, 7146, elidorik@cc.uoi.gr
cmsl.materials.uoi.gr/elidorik

Ύλικά κύματα

Τα όρια της θεωρίας Bohr

- Η θεωρία Bohr εξήγησε τα φάσματα των ατόμων, αλλά είχε περιορισμούς:
 - δεν προέβλεπε τις εντάσεις των φασματικών γραμμών
 - δεν προέβλεπε αρκετά καλά τα φάσματα πολυηλεκτρονικών ατόμων
 - δεν έδινε καμιά εξίσωση για χρονική εξέλιξη ατομικών συστημάτων
 - δεν έδινε ένα γενικό σχήμα «κβάντωσης» και για άλλα συστήματα
- Υπερτόνιζε την σωματιδιακή φύση της ύλης
 - δεν ερμήνευε τον κυματοσωματιδιακό διϊσμό του φωτός
- Εάν το φως έχει δυτή φύση, μήπως έχει και η ύλη;

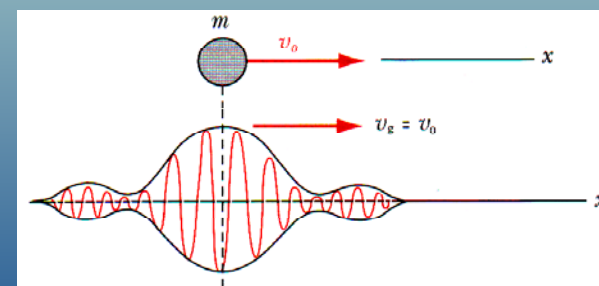
Οδηγούντα κύματα de Broglie

- Louis de Broglie (1923)
 - «όλες οι μορφές της ύλης έχουν και σωματιδιακές και κυματικές ιδιότητες»

- Δανειζόμενος σχέσεις απο τα φωτόνια

$$\left. \begin{aligned} hf &= E \\ E &= pc \end{aligned} \right\} \frac{hc}{\lambda} = pc \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \quad \text{το μήκος κύματος του οδηγούμενου κύματος}$$

- όπου η ορμή του σωματιδίου: $p = m v$





Κβάντωση στροφορμής

- Στο μοντέλο Bohr η στροφορμή είναι κβαντισμένη

$$mvr = n\hbar$$

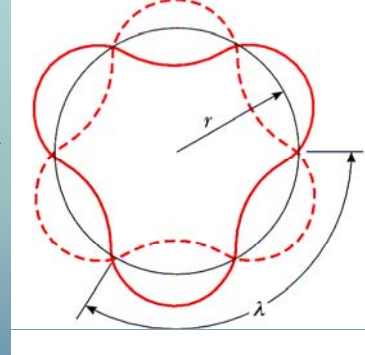
- Αυτό προκύπτει και από την θεωρία de Broglie:
 - οι ατομικές τροχιές είναι κβαντισμένες έτσι ώστε τα οδηγούμενα κύματα των ηλεκτρονίων να σχηματίζουν στάσιμα κύματα
- στάσιμα κύματα \Rightarrow ακέραιος αριθμός μηκών κύματος de Broglie χωρούν στην τροχιά

$$2\pi r = n\lambda \Rightarrow 2\pi r = n \frac{h}{p} \Rightarrow mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

$$\Rightarrow mvr = n\hbar$$

- Η ιδέα της κβάντωσης τροχιών δεν είναι πολύ διαφορετική από αυτή μιας παλλόμενης χορδής

αναπαράσταση της $n=3$ κατάστασης



Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Παράδειγμα 4.2

- Υπολογίστε το μήκος κύματος de Broglie για ηλεκτρόνιο που επιταχύνεται σε διαφορά δυναμικού 50 V.

- κινητική ενέργεια ηλεκτρονίου

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

- ορμή ηλεκτρονίου

$$mv = \sqrt{2meV}$$

- μήκος κύματος de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

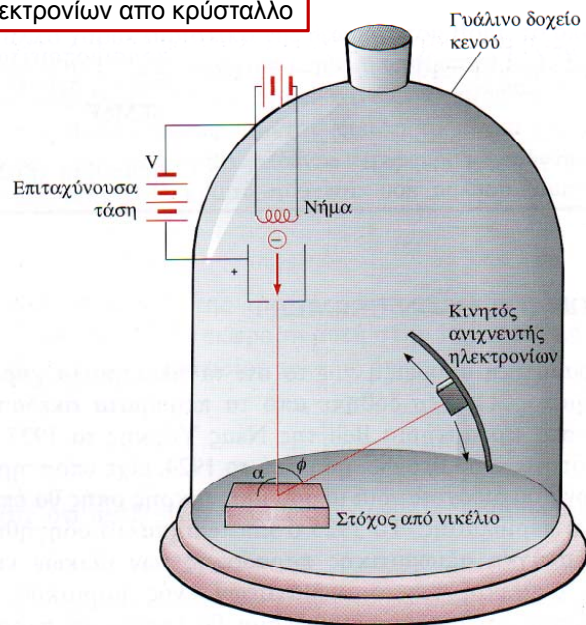
$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2 \cdot (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(50 \text{ V})}} = 0.174 \text{ nm}$$

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Πείραμα Davisson-Germer:

περίθλαση ηλεκτρονίων από κρύσταλλο



Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



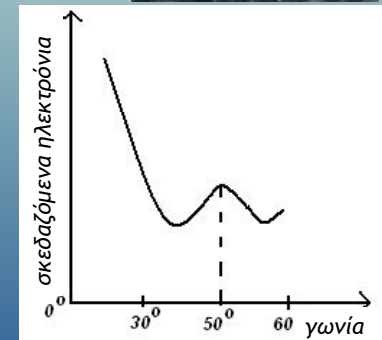
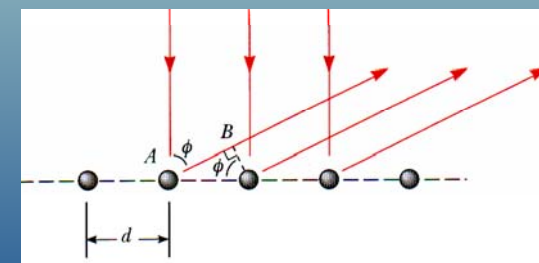
Πειραματική απόδειξη κυματικής υφής

- Πείραμα Davisson-Germer (1927)
 - σκέδαση ηλεκτρονίων χαμηλής ενέργειας (54 eV) από κρυσταλικό νικέλιο ($d=0.215 \text{ nm}$)
 - χαμηλή ενέργεια \rightarrow επιφανειακή σκέδαση

$$d \sin \phi = n\lambda$$

πειραματικό $\lambda = (0.215 \text{ nm})(\sin 50^\circ) = 0.165 \text{ nm}$

de Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = 0.167 \text{ nm}$



Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα

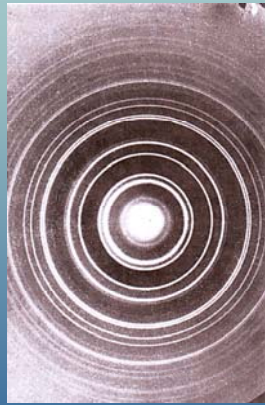


Περίθλαση ενεργητικών ηλεκτρονίων

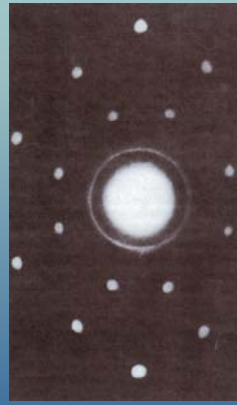
- Σε μεγάλες ενέργειες ηλεκτρονίων
 - εισχωρούν βαθιά στον κρύσταλλο → συνήθης σκέδαση Bragg

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

- πολύ πιο οξείες γραμμές περίθλασης



περίθλαση ηλεκτρονίων
50 keV από κρύμα Cu_3Au



περίθλαση ηλεκτρονίων
από μονοκρύσταλλο NaCl

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Παράδειγμα 4.3

- Μπορούν θερμικά νετρόνια να υποστούν περίθλαση σε κρυστάλλους;
 - θερμικά σωματίδια είναι αυτά που έχουν ενέργεια $3kT/2$
 - τι μήκος κύματος de Broglie έχουν τα θερμικά νετρόνια;

$$\frac{1}{2} m_n v^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow p_n = m_n v = \sqrt{3m_n kT} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{3m_n kT}}$$

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{\sqrt{3 \cdot (1.675 \times 10^{-27} \text{ kg})(1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}} = 0.145 \text{ nm}$$

το μήκος κύματος de Broglie των θερμικών νετρονίων είναι της τάξης μεγέθους των κρυσταλλικών αποστάσεων. Άρα θα υποστούν περίθλαση

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Παράδειγμα 4.3

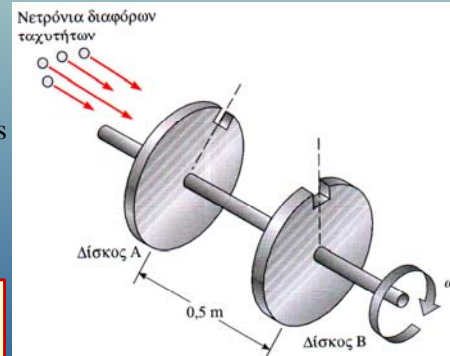
- Τα νετρόνια που δημιουργούνται σε πυρηνικούς αντιδραστήρες είναι μεγάλων ενεργειών και ακατάλληλα για πειράματα περίθλασης.
 - Συνήθως επιβραδύνονται από μια στήλη γραφίτη ώστε να καταλήξουν σε θερμικές ενέργειες
 - Για να καταφέρουμε μια «μονοχρωματική» δέση νετρονίων (όλα δηλαδή με το ίδιο μήκος κύματος de Broglie) χρησιμοποιείται η παρακάτω διάταξη (γωνία μεταξύ σχισμών 10°)
 - ποιά ταχύτητα περιστροφής της διάταξης απαιτείται ώστε να περνάνε μόνο νετρόνια με μήκος κύματος de Broglie 0.1 nm;

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

$$\Rightarrow v = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{(1.675 \times 10^{-27} \text{ kg})(10^{-10} \text{ m})} = 3960 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = \frac{0.5 \text{ m}}{3960 \text{ m/s}} = 0.000126 \text{ s}$$

$$T = \frac{360^\circ}{10^\circ} \Delta t = 0.004536 \text{ s} \quad f = \frac{1}{T} = 220 \text{ Hz}$$

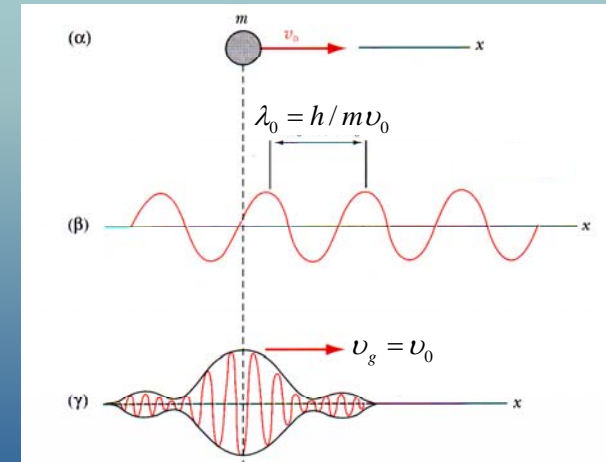


Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Οδηγούντα κυματοπακέτα

- Ξαναγυρνάμε στα οδηγούντα κύματα de Broglie
 - περιγράφονται από κυματοσμάδες: πολλές συχνότητες μαζί ώστε να δημιουργείται περιορισμένο κύμα στον χώρο
 - αυτό το κύμα «οδηγεί» το σωματίδιο στον χώρο
 - ας δούμε πρώτα τις ιδιότητες ενός άπειρου εκτεταμένου κύματος: επίπεδα κύματα



Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Επίπεδα κύματα

- Στην γενική του μορφή, ένα επίπεδο κύμα δίνεται

$$\Psi = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

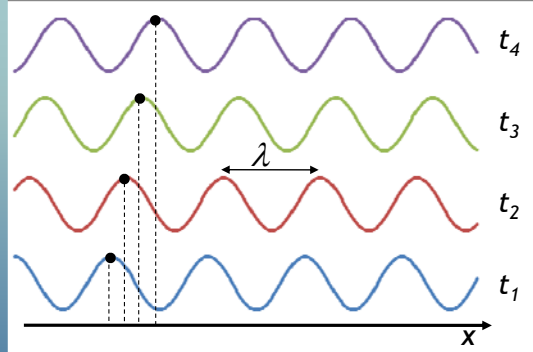
λ : χωρική περίοδος
 T : χρονική περίοδος

$$f = T^{-1}$$

- Η ταχύτητα διάδοσης της φάσης
 - για σημείο σταθερής φάσης

$$\frac{2\pi(x + \Delta x)}{\lambda} - \frac{2\pi(t + \Delta t)}{T} = \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\lambda} - \frac{\Delta t}{T} = 0 \Rightarrow v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T}$$



$$k = 2\pi / \lambda \quad \Psi = A \cos(kx - \omega t) \quad v_p = \lambda \cdot f = \omega / k$$

$$\omega = 2\pi / T$$

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Πρόσθεση δύο επίπεδων κυμάτων

- Δύο κύματα με μικρή διαφορά στο μήκος κύματος: διακρότημα

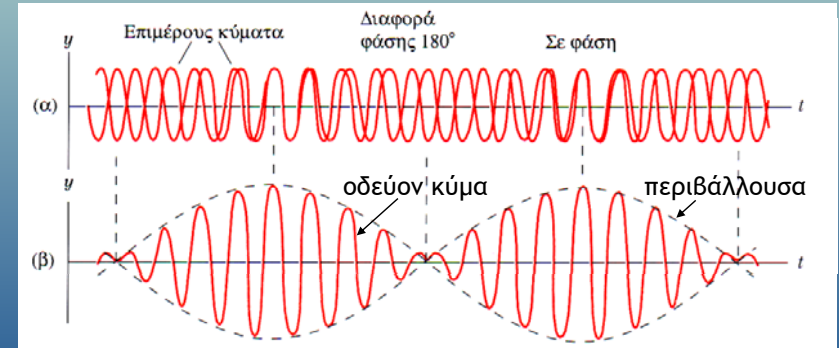
$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{ταχύτητα φάσης: } v_p = \bar{\omega} / \bar{k}$$

$$\text{ταχύτητα ομάδας: } v_g = \Delta\omega / \Delta k$$

$$\Psi = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$



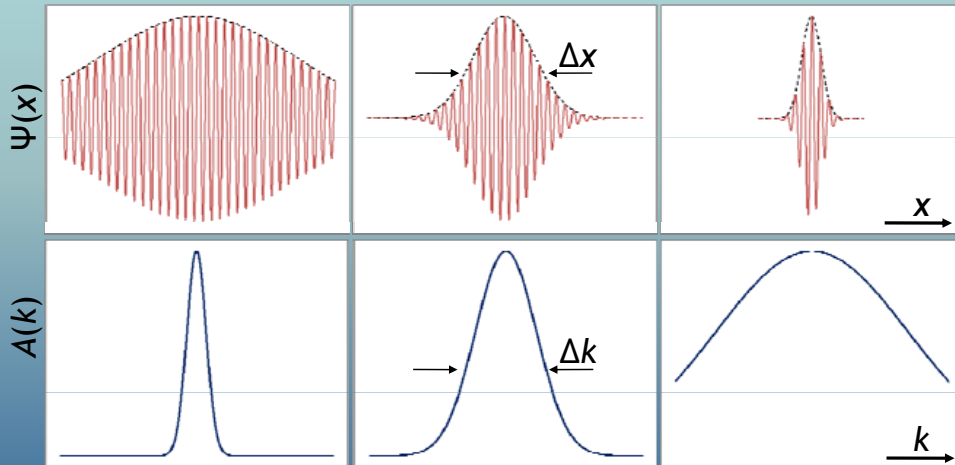
Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Κυματοομάδες

Ένα κυματοπακέτο περιλαμβάνει πολλά μήκη κύματος

$$\Psi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos(kx) dk$$



$$\text{γενικός κανόνας: } \Delta k \cdot \Delta x \approx 1$$

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Παράδειγμα με δύο κύματα

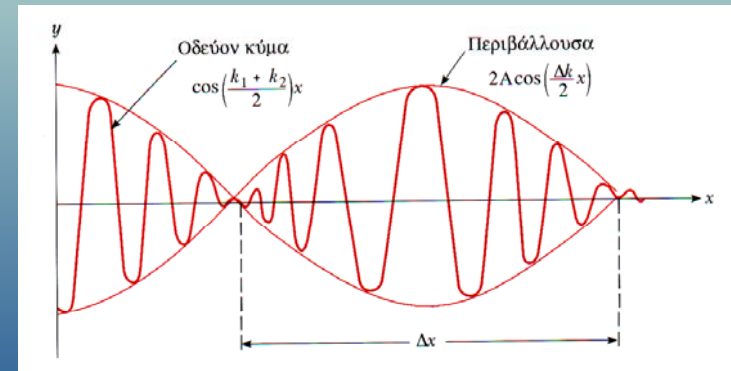
- Εάν θεωρήσουμε Δx το εύρος ενός διακροτήματος τότε

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}(x + \Delta x)\right) = \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)$$

το ίδιο ισχύει μεταξύ συχνότητας και χρόνου

$$\frac{\Delta k}{2} \Delta x = \pi \Rightarrow \Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$$

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi$$



Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Αρχή της απροσδιοριστίας

Werner Heisenberg (1927)

- σε μια μέτρηση, η αβεβαιότητα στην θέση Δx και η αβεβαιότητα στην ορμή Δp του σωματιδίου δεν μπορούν να ελατωθούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Το γινόμενο τους είναι πάντα:



$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta k \cdot \Delta x \geq 1 \\ p = \hbar k \end{array} \right\} \Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$$



Ένα παράδειγμα απροσδιοριστίας

- ένα φωτόνιο σκεδάζεται προς τον φακό
 - μέγιστη επιτρεπτή γωνία $\pm\theta$
 - ορμή $p = h/\lambda$
 - λόγω διατήρησης ορμής στον x άξονα, η απροσδιοριστία στην ορμή του ηλεκτρονίου

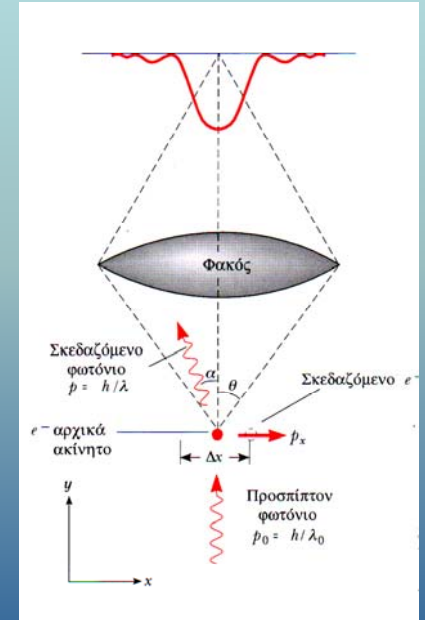
$$\Delta p = 2 \frac{h}{\lambda} \sin \theta$$

- το φωτόνιο συλλέγεται από τον φακό
 - διακριτική ικανότητα φακού (και άρα διακριτική ικανότητα θέσης ηλεκτρονίου)

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

- γινόμενο αβεβαιοτήτων

$$\Delta p \cdot \Delta x = \left(2 \frac{h}{\lambda} \sin \theta \right) \left(\frac{\lambda}{2 \sin \theta} \right) = h$$



Αρχή της απροσδιοριστίας

Δύο σχέσεις απροσδιοριστίας

- θέσης - ορμής

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$$

- ενέργειας-χρόνου

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$



Παράδειγμα 4.6

- Η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου βρέθηκε ίση με 5000 m/s, με περιθώριο σφάλματος 0.003%.
 - ποιά η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης;

- ορμή ηλεκτρονίου

$$p = mv = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(5000 \text{ m/s}) = 4.56 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

- αβεβαιότητα στην ορμή

$$\Delta p = p \cdot 0.00003 = 1.37 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

- αβεβαιότητα στην θέση

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1.37 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 0.77 \times 10^{-3} \text{ m}$$



Παράδειγμα 4.7

- Ένα διεγερμένο άτομο μπορεί οποιαδήποτε στιγμή να εκπέμψει ένα φωτόνιο και να γυρίσει στην θεμελιώδη κατάσταση
 - κατά μέσο όρο το κάνει μετά απο χρόνο τ , χαρακτηριστικό για κάθε διαφορετικό άτομο και στάθμη.
 - τι διεύρυνση προκαλείται στην συχνότητα εκπομπής λόγω αυτού όταν $\tau=10^{-8}$ s;

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

$$h\Delta f \cdot \tau \approx \hbar \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{2 \cdot 3.14159 \cdot 10^{-8} \text{ s}} = 1.6 \times 10^7 \text{ Hz}$$



Τι είναι η κυματοσυνάρτηση;

- Το κύμα που περιγράφει το σωματίδιο
 - κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$
- Δεν είναι μετρήσιμη
- Είναι εν γένει μιγαδική
- Το τετράγωνο του μέτρου της αντιπροσωπεύει πιθανότητα
 - πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στην θέση x είναι ανάλογη του: $|\Psi(x)|^2 = \Psi^*(x) \cdot \Psi(x)$
 - είχε υπάρξει μεγάλη διαμάχη μεταξύ των φυσικών στα πρώτα χρόνια ως προς τι ακριβώς αντιπροσωπεύει
- Το ηλεκτρόνιο (και κάθε μικρό σωματίδιο) συμπεριφέρεται είτε ως σωματίδια είτε ως κύματα, ανάλογα με το είδος του πειράματος.

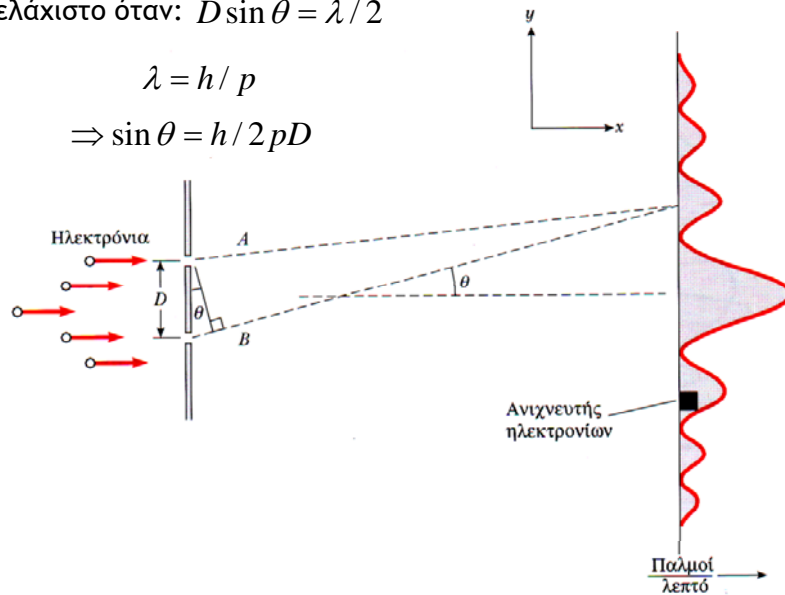


Περίθλαση από δύο σχισμές

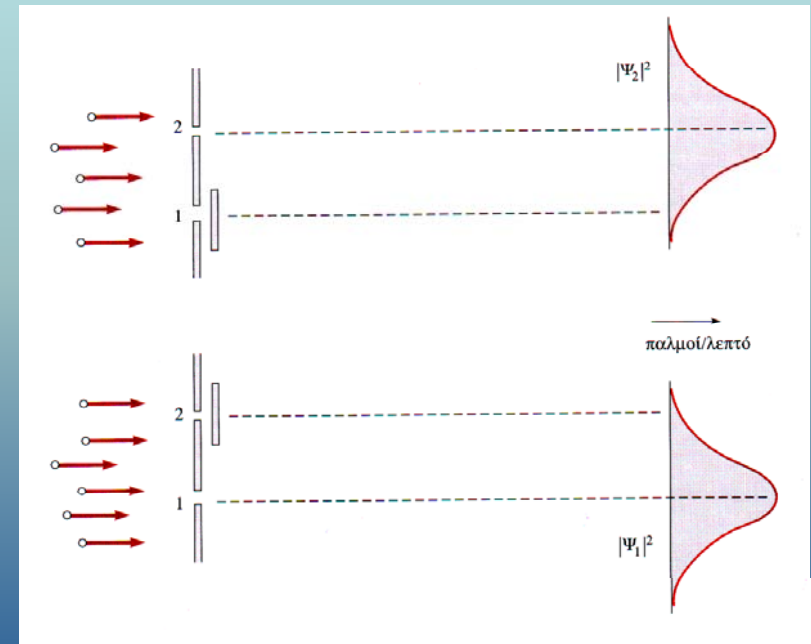
ελάχιστο όταν: $D \sin \theta = \lambda / 2$

$$\lambda = h / p$$

$$\Rightarrow \sin \theta = h / 2 p D$$



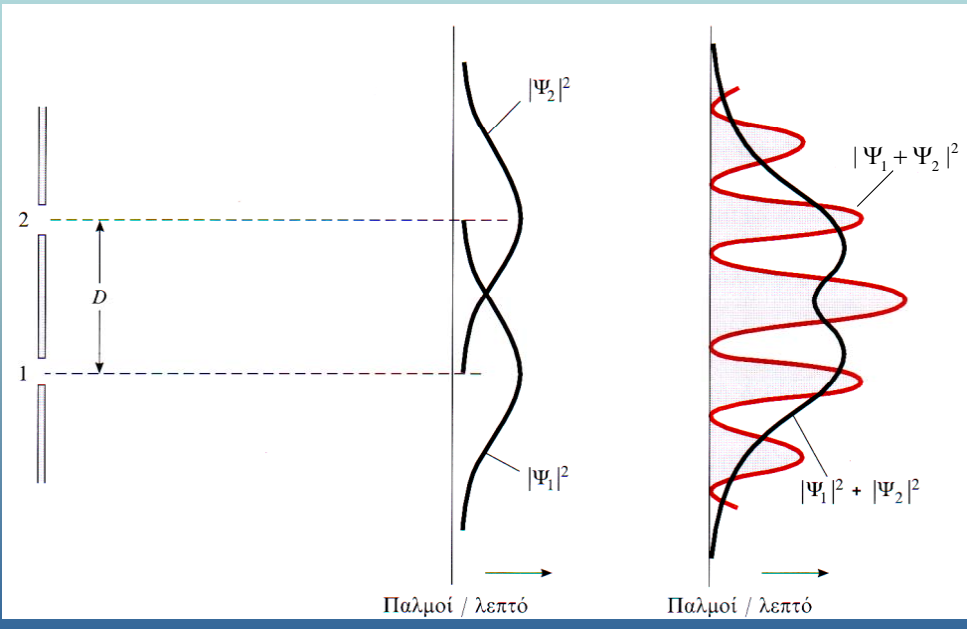
Περίθλαση από δύο σχισμές





Περίθλαση από δύο σχισμές

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα



Περίθλαση από δύο σχισμές

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα

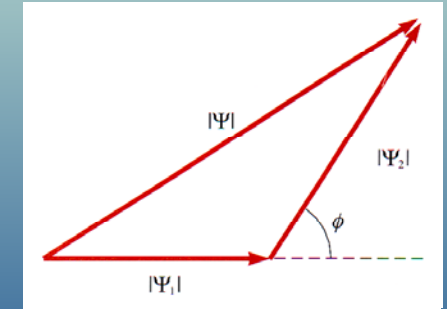
- Το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε μια κατάσταση υπέρθεσης, ασχέτως από ποιά σχισμή περνάει

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

- Η πιθανότητα ανίχνευσης στην οθόνη είναι

$$|\Psi|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$$

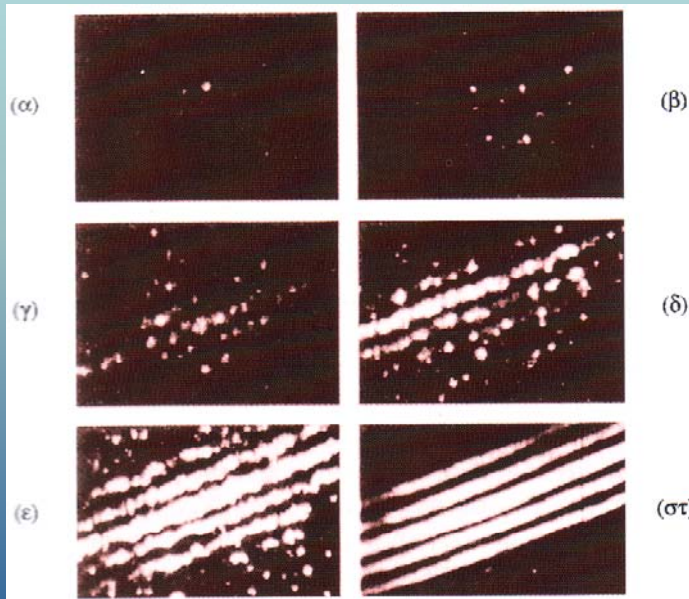
$$|\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1| \cdot |\Psi_2| \cos \phi$$



Περίθλαση από δύο σχισμές

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα

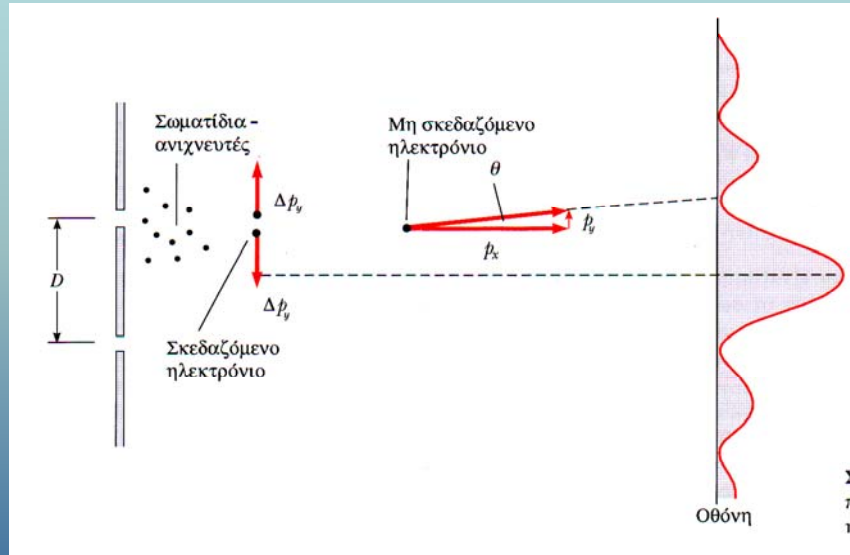
- Μέτρηση σε διαφορετικές χρονικές στιγμές



Κατάσταση υπέρθεσης: η περίφημη «γάτα του Schrödinger»

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ύλικά Κύματα





Προβλήματα

$$\lambda = h / p \quad \Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$$

- 4.5: Ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο έχουν το καθένα ενέργεια ίση με 50 keV. Ποιά είναι τα μήκη κύματος de Broglie; Για ένα φωτόνιο πόσο είναι;
- 4.8: Βρείτε το μήκος κύματος de Broglie μιας μπάλας μάζας 0.2 kg η οποία έχει ριχθεί απο κτήριο ύψους 50 m, λίγο πριν αυτή χτυπήσει στην γή.

δείτε αυτό: <http://htwins.net/scale/index.html>
- 4.11: Από ποιά διαφορά δυναμικού θα πρέπει να επιταχυνθεί ένα ηλεκτρόνιο ώστε να αποκτήσει μήκος κύματος de Broglie 10^{-10} m;
- 4.14: Μια μπάλα μάζας 50 g κινείται με ταχύτητα 30 m/s. Αν η ταχύτητά της μετριέται με περιθώριο σφάλματος 0.1%, πόση είναι η ελάχιστη αβεβαιότητα για την θέση της μπάλα;
- 4.15: Ένα πρωτόνιο έχει κινητική ενέργεια 1 MeV. Αν η ορμή του μετριέται με αβεβαιότητα 5%, πόση είναι η ελάχιστη αβεβαιότητα της θέσης του;