

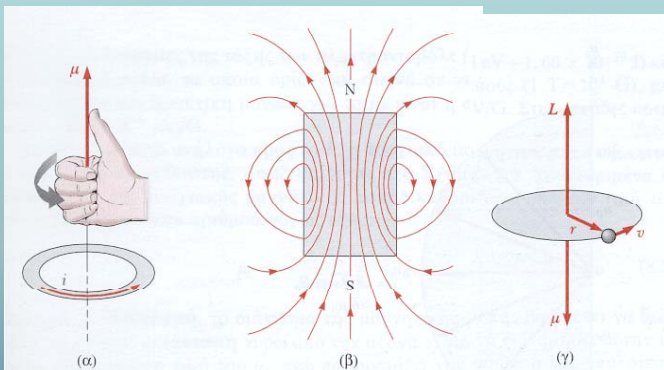


Κβαντική Θεωρία της Ύλης

Διδάσκων: Λευτέρης Λοιδωρίκης
Π1, 7146, elidorik@cc.uoi.gr
cmsl.materials.uoi.gr/elidorik

Ατομική Δομή

Μαγνητική ροπή



Μαγνητική ροπή
ρευματοφόρου βρόγχου

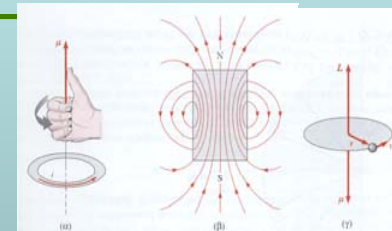
$$\vec{\mu} = i \vec{A}$$

Μαγνητική ροπή
φορτίου σε τροχιά;

Μαγνητική ροπή φορτίου σε τροχιά

Μαγνητική ροπή
ρευματοφόρου βρόγχου

$$\vec{\mu} = i \vec{A}$$



Για φορτίο σε τροχιά:

- φορτίο q
- μάζα m
- τροχιά ακτίνας r
- ταχύτητα περιστροφής v

Βρίσκουμε:

- εμβαδό τροχιάς $A = \pi r^2$
- περίοδος περιστροφής $T = 2\pi r/v$
- ρεύμα $i = q/T$
- μαγνητική ροπή

$$\mu = i \cdot A = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{qvr}{2}$$

Τι είναι καλά καθορισμένο σε μια ατομική τροχιά;

Η στροφορμή. Στην κλασική της έκφραση $L = mvr$

Μαγνητική ροπή
φορτίου σε τροχιά $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$

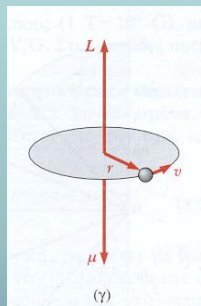
γυρομαγνητικός λόγος $q/2m$



Μαγνητική ροπή λόγω περιστροφής

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή

$$\vec{\mu} = -\left(\frac{e}{2m}\right) \vec{L}$$



Η σχέση ισχύει και στο κβαντομηχανικό ανάλογο => κβάντωση της μαγνητικής ροπής

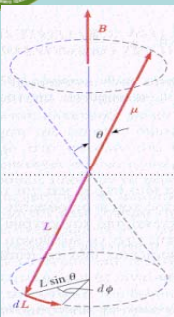
$$|\vec{\mu}| = -\left(\frac{e}{2m}\right) |\vec{L}|$$

$$|\vec{\mu}_z| = -\left(\frac{e}{2m}\right) |\vec{L}_z|$$



Δυναμική ενέργεια σε μαγνητικό πεδίο

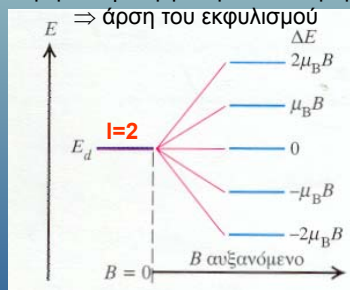
Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή



Γωνία μεταξύ \vec{L} και \vec{B} (άξονα z):

$$\cos \vartheta = \frac{L_z}{|\vec{L}|} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

διαφορετική ενέργεια για κάθε προβολή



$$U_{\text{μαγνητικού πεδίου}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$U_{\text{μαγνητικού πεδίου}} = -\mu \cdot B \cdot \cos \theta = -\mu_z \cdot B = -(-m_l \cdot \mu_B) \cdot B \Rightarrow$$

$$U_{\text{μαγνητικού πεδίου}} = m_l \cdot \mu_B \cdot B$$

Η ιδεατική μεταπτωτική κίνηση, τώρα γίνεται πραγματική λόγω του B. Η συχνότητα μετάπτωσης είναι ω_L

Μετάπτωση Larmor

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}$$



Μαγνητική ροπή λόγω περιστροφής

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή

Να προσδιορισθεί το μέτρο της μαγνητικής ροπής ενός ηλεκτρονίου λόγω της τροχιακής περιστροφής του.

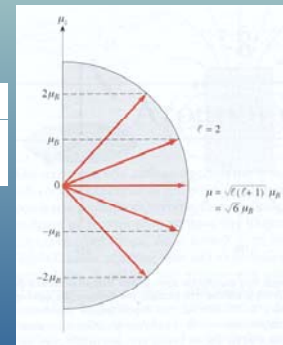
$$|\vec{\mu}_L| = -\frac{e}{2m} \cdot |\vec{L}| = -\frac{e}{2m} \cdot \sqrt{l(l+1)} \hbar = -\left(\frac{e\hbar}{2m}\right) \cdot \sqrt{l(l+1)} \Rightarrow |\vec{\mu}_L| = -\mu_B \cdot \sqrt{l(l+1)}$$

Μαγνητόνη του Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,274 \times 10^{-24} \frac{J}{T} = 9,274 \times 10^{-24} A \cdot m^2$$

Να προσδιορισθεί η προβολή της μαγνητικής ροπής ενός ηλεκτρονίου λόγω της τροχιακής περιστροφής του στον άξονα z.

$$|\vec{\mu}_{L_z}| = -\frac{e}{2m} \cdot |\vec{L}_z| = -\frac{e}{2m} \cdot (m_l \cdot \hbar) \Rightarrow |\vec{\mu}_{L_z}| = -\mu_B \cdot m_l$$



Μετάπτωση Larmor

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή

Η στροφορμή μεταβάλλεται λόγω της ροπής

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Η γωνία θ δεν αλλάζει, η στροφορμή περιστρέφεται στο xy επίπεδο

$$\frac{d|\vec{L}|}{dt} = \frac{|\vec{L}| \sin \theta \cdot d\phi}{dt}$$

Το μέτρο της ροπής

$$|\vec{\tau}| = |\vec{\mu}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{|\mu| B}{|\vec{L}|} \quad |\mu| = \frac{e}{2m} |\vec{L}|$$

$$\text{συχνότητα Larmor } \omega_L = \frac{d\phi}{dt} = \frac{eB}{2m}$$



Άτομο σε μαγνητικό πεδίο

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή

- Μαγνητική ροπή $\mu = m_l \mu_B = m_l \frac{e\hbar}{2m}$
- συχνότητα μετάπτωσης Larmor $\omega_L = \frac{eB}{2m}$
- ενέργεια λόγω μαγνητικού πεδίου $U_{B,m_l} = -m_l \mu_B B = -m_l \hbar \omega_L$
- Ολική ενέργεια $E = E_n - m_l \hbar \omega_L$

Οι κυματοσυναρτήσεις του ηλεκτρονίου δεν αλλάζουν. Αλλάζουν:

- οι ιδιοτιμές της ενέργειας: **άρση εκφυλισμού**
- η μεταπτώτική κίνηση γίνεται πραγματική: **μετάπτωση Larmor**



Παράδειγμα 8.1, σελίδα 257

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή

Υπολογίστε τη μαγνητική ενέργεια και τη συχνότητα Larmor για ένα ηλεκτρόνιο στη στάθμη $n=2$ του υδρογόνου, δεχόμενοι ότι το άτομο βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο έντασης $B=1.00$ T.

$$U_{\text{πεδίου}}^{\text{μαγνητικού}} = m_l \cdot \mu_B \cdot B$$

Μαγνητόνη του Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,274 \times 10^{-24} \frac{J}{T} = 9,274 \times 10^{-24} A \cdot m^2$$

Μετάπτωση Larmor

$$\omega_L = \frac{eB}{2m} = \frac{\mu_B B}{\hbar}$$

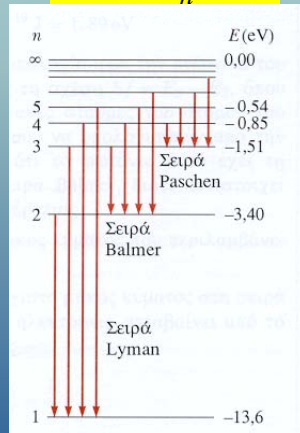


Ενέργεια στο άτομο του υδρογόνου

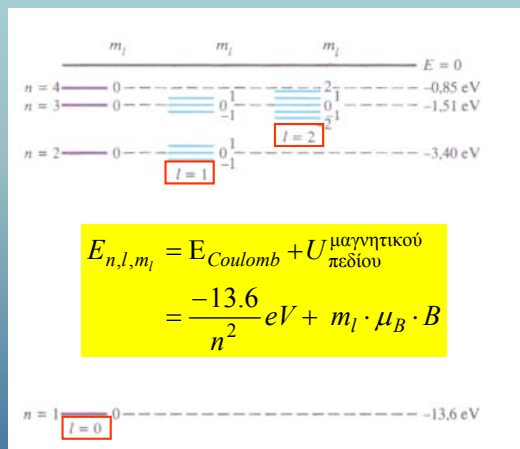
Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή

Χωρίς μαγνητικό πεδίο

$$E_{n,l,m_l} = E_{Coulomb} = \frac{-13.6}{n^2} eV$$



Εφαρμογή μαγνητικού πεδίου



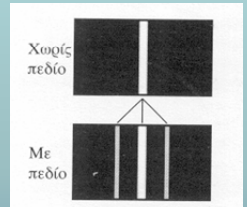
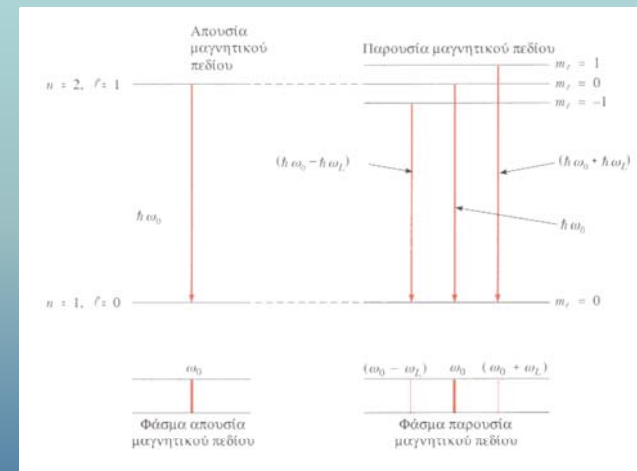
$$E_{n,l,m_l} = E_{Coulomb} + U_{\text{πεδίου}}^{\text{μαγνητικού}} = \frac{-13.6}{n^2} eV + m_l \cdot \mu_B \cdot B$$

Μερική άρση του εκφυλισμού



Η μετάβαση 2p→1s στο υδρογόνο

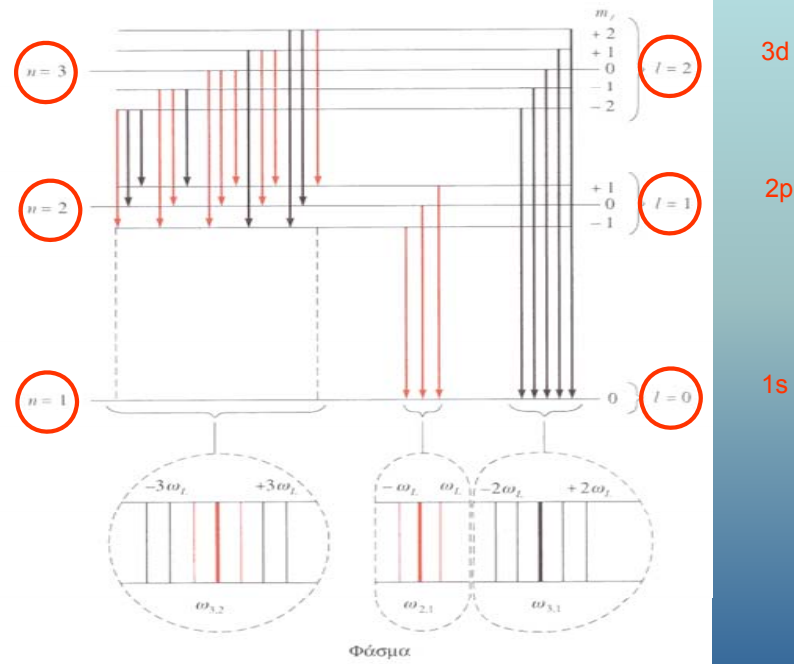
Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή



Φαινόμενο Zeeman

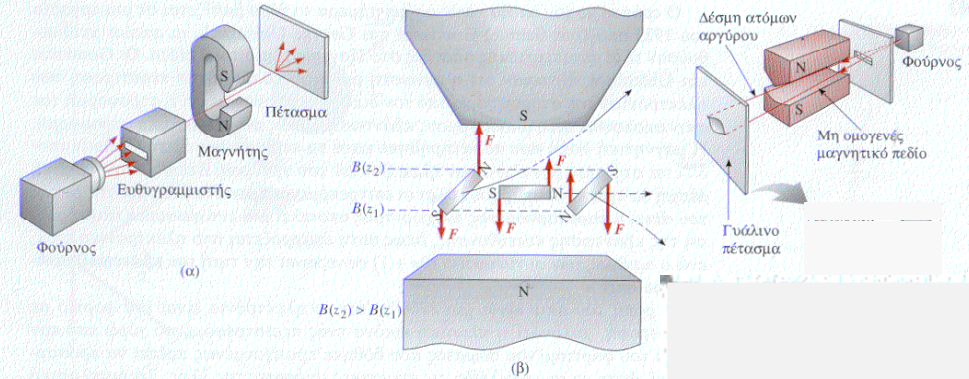


Κανόνες επιλογής



Ατομική Δομή
Κβαντική Θεωρία της

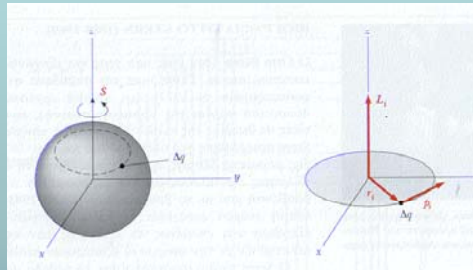
Πείραμα Stern-Gerlach



Κβα



Στροφορμή λόγω ιδιοπεριστροφής



$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

όπου s ο κβαντικός αριθμός του σπιν

Ποιες οι τιμές του κβαντικού αριθμού του σπιν ;

-Έχουμε 2 δυνατές προβολές του σπιν
-Οι δύο προβολές εισαπέχουν κατά ένα
Δηλ $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$

οι προβολές είναι $m_s = \pm 1/2$
και $s=1/2$

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή

Φερμιόνια - Μποζόνια



Σωματίο	Σπίν (s)	Στατιστική
Ήλεκτρόνιο	1/2	Φερμιόνιο
Ποζιτρόνιο	»	»
Πρωτόνιο	»	»
Νετρόνιο	»	»
μ-μεσόνιο	»	»
α-σωμάτιο	0	Μποζόνιο
Άτομο Ήλιου (Βασική κατάσταση)	0	»
π-μεσόνιο	0	»
Φωτόνιο	1	»
Δευτέριο	1	»

Ημιακέραιο σπιν \Rightarrow Φερμιόνια (Fermions)

Ακέραιο σπιν \Rightarrow Μποζόνια (Bosons)

Φερμιόνια \Rightarrow Απαγορευτική αρχή του Pauli

Κβαντική Θεωρία της Ύλης: Ατομική Δομή



Τροχιακή στροφορμή - Στροφορμή λόγω σπιν

Μέτρο τροχιακής στροφορμής :

$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \\ l = 0, 1, \dots, n-1$$

Προβολή τροχιακής στροφορμής στον άξονα z :

$$L_z = m_l \hbar, \\ m_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

Γωνία μεταξύ \vec{L} και άξονα z :

$$\cos \vartheta = \frac{L_z}{|\vec{L}|} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

Μέτρο στροφορμής λόγω spin :

$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar,$$

$$s = \frac{1}{2} \text{ για το ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο, νετρόνιο} \\ s = 1 \text{ για το φωτόνιο}$$

Προβολή στροφορμής spin στον άξονα z :

$$S_z = m_s \hbar, \\ m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

Γωνία μεταξύ \vec{S} και άξονα z :

$$\cos \vartheta = \frac{S_z}{|\vec{S}|} = \frac{m_s}{\sqrt{s(s+1)}}$$

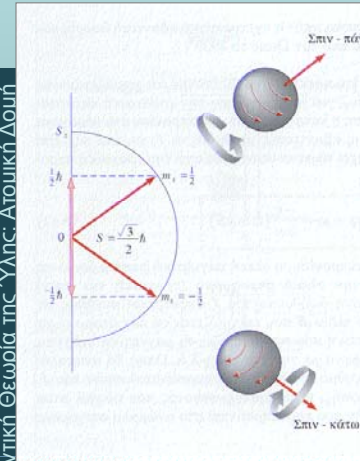


Άσκηση 8.1

- Το φωτόνιο είναι σωματίδιο με σπιν 1. Υπολογίστε τις δυνατές γωνίες ανάμεσα στον άξονα z και στον άξονα περιστροφής για το φωτόνιο.



Στροφορμή σπιν του ηλεκτρονίου



Κβαντικός αριθμός του σπιν για το ηλεκτρόνιο

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

στροφορμή λόγω ιδιοπεριστροφής του ηλεκτρονίου

$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$

Προβολή της στροφορμής σπιν

$$S_z = m_s \cdot \hbar, \text{ όπου } m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 8.2, σελίδα 264: α) Υπολογίστε τις γωνίες ανάμεσα στον άξονα z και στον άξονα περιστροφής για το περιστρεφόμενο ηλεκτρόνιο, στην άνω και στην κάτω κατάσταση του σπιν. **β)** Πως θα μπορούσαμε να αποδώσουμε παραστατικά την εγγενή ασάφεια των συνιστωσών x και y της στροφορμής του σπιν;



Μαγνητική ροπή ηλεκτρονίου λόγω σπιν

$$\vec{\mu}_s = -\left(\frac{e}{2m}\right) \cdot g \cdot \vec{S},$$

με $g = 2$ για το ηλεκτρόνιο

Να προσδιορισθεί το μέτρο της μαγνητικής ροπής ενός ηλεκτρονίου λόγω της ιδιοπεριστροφής του.

$$|\vec{\mu}_s| = -\frac{e}{2m} \cdot g \cdot |\vec{S}| = -\frac{e}{2m} \cdot g \cdot \sqrt{s(s+1)} \hbar = -\left(\frac{e \hbar}{2m}\right) \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} \Rightarrow |\vec{\mu}_s| = -\sqrt{3} \cdot \mu_B$$

Μαγνητόνη του Bohr

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m} = 9,274 \times 10^{-24} \frac{J}{T} = 9,274 \times 10^{-24} A \cdot m^2$$

Να προσδιορισθεί η προβολή της μαγνητικής ροπής ενός ηλεκτρονίου λόγω της ιδιοπεριστροφής του στον άξονα z.

$$|\vec{\mu}_{sz}| = -\frac{e}{2m} \cdot g \cdot |\vec{S}_z| = -\frac{e}{2m} \cdot 2 \cdot (m_s \cdot \hbar) = -2 \cdot \mu_B \cdot m_s \Rightarrow |\vec{\mu}_{sz}| = \begin{cases} -\mu_B & \text{για } S_z = \frac{1}{2} \\ \mu_B & \text{για } S_z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Αλληλεπίδραση σπιν - μαγνητικού πεδίου

Υπολογίστε την ενέργεια αλληλεπίδρασης ενός s ηλεκτρονίου σε μαγνητικό πεδίο μέτρου 2.00 T.

$$U_{\text{μαγνητικού πεδίου}} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\mu}_s = -\left(\frac{e}{2m}\right) \cdot g \cdot \vec{S},$$

με $g = 2$ για το ηλεκτρόνιο

Γωνία μεταξύ \vec{S} και άξονα z :

$$\cos \vartheta = \frac{S_z}{|\vec{S}|} = \frac{m_s}{\sqrt{s(s+1)}}$$

$$\begin{aligned}
U_{\text{μαγνητικού πεδίου}} &= -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \\
&= -\left(-\frac{e}{2m} \cdot g \cdot \vec{S}\right) \cdot \vec{B} \\
&= \frac{e}{2m} \cdot g \cdot |\vec{S}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \vartheta \\
&= \frac{e}{2m} \cdot g \cdot \left(\sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar\right) \cdot |\vec{B}| \cdot \frac{m_s}{\sqrt{s(s+1)}} \Rightarrow \\
U_{\text{μαγνητικού πεδίου}} &= \mu_B \cdot 2 \cdot m_s \cdot |\vec{B}|
\end{aligned}$$

